به نام او که در نام نگنجد

کتاب درسی زیرذره‌بین

ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم

رشته ریاضی

تألیف: نوید یکتا

نکات کتاب درسی

بررسی خط‌به‌خط کتاب درسی

تست‌ها و پرسش‌های متناسب با درس

سرشناسه : یکتا، نوید، ۱۳۵۵-

عنوان : کتاب درسی زیر ذره‌بین ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی/ تألیف نوید یکتا.

مشخصات نشر : تهران: کتب آموزشی پیشرفته، ۱۴۰۰

مشخصات ظاهری : ۹۶ ص.: مصور، جدول؛ ۲۲×۲۹ س‌م.

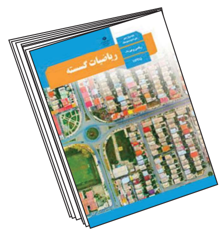
شابک : ۹۵۰۰۰۰ ریال: ۵-۸۲-۷۰۷۱-۶۲۲-۹۷۸

وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر

شماره کتابشناسی ملی : ۸۸۵۶۳۵۰

اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

این کتاب ۹۶ صفحه می‌باشد.



نام کتاب : **ریاضیات گسسته- پایه دوازدهم(رشته ریاضی)**

ناشر : **کتب آموزشی پیشرفته (کاپ)**

عنوان پروژه : **کتاب درسی زیر ذره‌بین**

تألیف : **نوید یکتا**

مدیر تألیف : **احمد مصلایی**

ناظر فنی : **سیما رائفی‌نیا**

صفحه‌بندی : **نازنین احمدی شفق**

حروف‌چینی : **جواد جعفریان**

ویراستار علمی : **نسرین افتخاری**

ویراستار فنی : **مریم مجاور**

طراحی جلد : **امیرحامد پاژتار**

ایده طرح جلد : **احمد مصلایی**

لیتوگرافی و چاپ : **گلپا گرافیک/ نگار نقش**

سال و نوبت چاپ : **۱۴۰۰/ اول**

شابک : **۵-۸۲-۷۰۷۱-۶۲۲-۹۷۸**

شمارگان : **۱۰۰۰ نسخه**

قیمت : **۹۵۰۰۰ تومان**

مرکز فروش: میدان انقلاب- خیابان فخررازی- خیابان وحیدنظری غربی- پلاک ۸۳

۰۲۱-۶۶۴۹۳۴۹۰ ۰۲۱-۶۶۹۶۱۰۷۹ ۰۲۱-۶۶۹۶۴۷۲۳ -۵

صندوق پستی: ۱۱۳۹-۱۳۱۴۵ سایت نشر کاپ: www.cup-book.com

آدرس سایت زیرذره‌بین: www.zirezarebinpub.ir

مقدمهٔ ناشر

معرفی انتشارات کاپ

انتشارات کاپ در سال ۱۳۹۸ با هدف «تولید محتوای آموزشی» اعلام موجودیت کرد. سیاست ما تولید آثاری است که فقدان و نیاز به آن‌ها در فضای آموزشی کشور احساس می‌شود.

کتاب درسی خیلی مهم است!

مهم‌ترین و اولین منبعی که دانش‌آموز پس از حضور در کلاس درس باید به آن مراجعه کند، «کتاب درسی» است؛ این در حالی است که اکثر دانش‌آموزان قدم اول را به اشتباه با مطالعهٔ کتاب‌های کمک‌درسی که گاهی فاصلهٔ زیادی تا کتاب درسی دارند، برمی‌دارند و نتیجهٔ این تصمیم اشتباه و پرش مطالعاتی، یادگیری ناقص و ناآمادگی در آزمون‌های مرتبط با درس مورد نظر است.

با مطالعهٔ «کتاب‌های درسی زیرذره‌بین» به چه نتایجی می‌رسید؟

واقعیت این است که اکثر دانش‌آموزان یا کتاب درسی را اصلاً نمی‌خوانند یا به‌طور سطحی می‌خوانند. این رویگردانی از کتاب درسی می‌تواند دلایل زیادی داشته باشد:

دلیل اول: ممکن است کتاب درسی برای دانش‌آموز قابل درک نباشد.

دلیل دوم: ممکن است دانش‌آموز با خواندن کتاب درسی به هدف خود در فهم کامل مفاهیم کتاب و گرفتن نتیجهٔ مناسب در آزمون‌های آن درس نرسد.

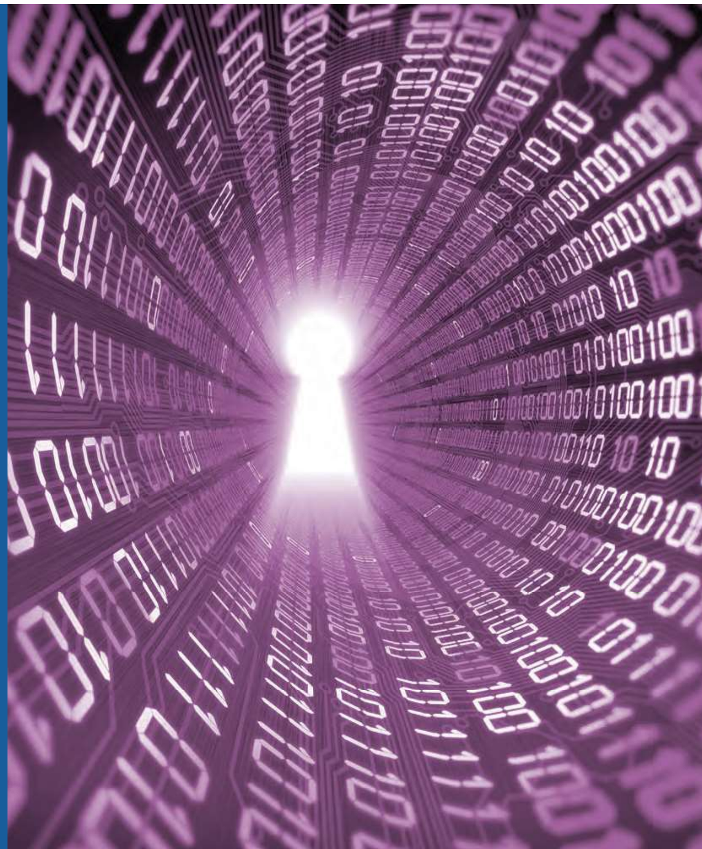
به دلایل دیگر کاری نداریم! «کتاب‌های درسی زیر ذره‌بین» دقیقاً برای رفع دو اشکال بالا طراحی و تألیف شده‌اند. در این کتاب‌ها، مؤلف خود را در جایگاهی قرار می‌دهد که مفاهیم یک درس را با استفادهٔ مستقیم از متن کتاب درسی به خواننده یاد می‌دهد و هرجا نیاز به تفسیر مطلب ، توضیح بیشتر، پرسش یا تست است، آن را به کتاب اضافه می‌کند تا کتاب درسی به‌طور کامل درک شود. با این کتاب‌ها به پایه‌های لازم برای پیشرفت در دروس خود دست پیدا می‌کنید. خیالتان که از بابت درک کتاب راحت شد، می‌توانید به منبع دیگری (مانند کتاب‌های تست) برای افزایش مهارت و رسیدن به تسلط در آن درس مراجعه کنید. تأکید می‌کنیم این کتاب‌ها حل‌المسائل نیستند، هر چند که ممکن است بعضی از پرسش‌های مهم کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته باشند.

تقدیم به

من که ملول گشتمی از نفس فرشتگان   قال و مقال عالمی ، می‌کشم از برای تو

به پسرم ، جانم ، محمد

فهرست



۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

نظریه اعداد و به‌خصوص مبحث هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در علوم مربوط به رایانه، رمزنگاری و رمزگشایی، حساب با اعداد صحیح بزرگ، طراحی الگوریتم‌های سودمند برای حساب کامپیوتری و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۱ + ۲^{۲^n}$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

هر موقع عبارتی مانند این عبارت دیدید و گفتند به ازای همهٔ مقادیر اول است و بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند بدانید که این گزاره غلط است و به دنبال مثال نقض بگردید. حتی اگر، برای مثال‌های زیادی حاصل عدد اول باشد.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

اگر برای یک مسئله یا گزاره چند تا مثال بزنیم به فهم اون مسئله کمک می‌کند.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$$۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۳۳ \qquad ۵ + ۶ + ۷ = ۱۸$$

$$۳۱ + ۳۲ + ۳۳ = ۹۶ \qquad ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ = ۷۸$$

در همه موارد حاصل جمع‌های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n = ۱$, $n = ۲$, $n = ۳$ و $n = ۴$ حاصل $۱ + ۲^{۲^n}$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟ خیر

ارائه مثال برای برقراری گزاره کافی نیست.

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n = ۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^n} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

مثال نقض برای اول بودن $۱ + ۲^{۲^n}$ است.

تست مثال نقض مثالی است که:

۱) نه در فرض صدق کنه نه در حکم.

۲) در فرض صدق کند ولی در حکم صدق نکند.

۳) هم در فرض صدق کند هم در حکم.

۴) در فرض صدق نکند ولی در حکم صدق کند.

پاسخ ۲

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

گزاره‌های مشابه

۱- مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد، فرد است.

فرض $\begin{cases} a=2k \\ b=2k'+1 \end{cases}$ حکم: $a+b=2k''+1$

اثبات: $a+b=(2k)+(2k'+1)=2\underbrace{(k+k')}_{k''}+1 \Rightarrow a+b=2k''+1$

۲- مجموع دو عدد زوج، زوج است.

فرض $\begin{cases} a=2k \\ b=2k' \end{cases}$ حکم: $a+b=2k''$

اثبات: $a+b=2k+2k'=2\underbrace{(k+k')}_{k''}=2k''$

مثال نقض: $x=16$ ، $y=9$

$\underbrace{\sqrt{16+9}}_{5} \neq \underbrace{\sqrt{16}+\sqrt{9}}_{7}$

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

✓ الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (نهایی شهریور ۹۸)

✗ ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (نهایی شهریور ۹۹)

✗ پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است. (نهایی شهریور ۹۸) گفتیم عبارتی که برای هر n اول باشد نداریم. دنبال مثال نقض باشید. $n=4$

✓ ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

✗ ث) اگر برای سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$

✓ ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است. (نهایی دی ۹۷)

۱ «مجموع هر دو عدد گویا، گویا است» یک گزاره درست است.

راهنمایی برای اثبات:

$a=\frac{m}{n}, b=\frac{k}{t}$ $(m,n,k,t\in\mathbb{Z})$ $(n,t\neq 0)$

$a+b=\frac{m}{n}+\frac{k}{t}=\dots$

۲ «مجموع هر دو عدد گنگ یک عدد گنگ است» (نهایی خرداد ۹۹)

پاسخ یک گزاره غلط است. مثال نقض:

$a=\sqrt{2}+1$, $b=1-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}'$

$a+b=\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}=2\notin\mathbb{Q}'$

(امتحان نهایی خرداد ۹۹ و شهریور ۹۸)

اگر $B=C$ باشد آنگاه: $\begin{cases} 1)\ A\cup B=A\cup C \\ 2)\ A\cap B=A\cap C \end{cases}$ ولی عکس آن درست نیست.

مثال نقض برای عکس

$\begin{cases} \text{اگر } A=\{1,2\}\text{، } B=\{1,3\} \text{ و } C=\{2,3\} \text{ باشد } A\cup B=A\cup C \text{ است ولی } B\neq C. \\ \text{اگر } A=\{1\}\text{، } B=\{1,3\} \text{ و } C=\{1,2\} \text{ باشد } A\cap B=A\cap C \text{ است ولی } B\neq C. \end{cases}$

پرسش گزاره‌های درست را اثبات کنید و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بزنید:

۱ اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است. (امتحان نهایی دی ۹۷)

پاسخ $k=n(n+1)\Rightarrow 4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

۲ اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. (امتحان نهایی خرداد ۹۹)

پاسخ $\underbrace{(2k+1)^2}_{\text{مربع عدد فرد}}-1=4k^2+4k+1-1=4\underbrace{k(k+1)}_{2t}=4\times 2t=8t$

حاصلضرب دو عدد متوالی زوج است

پرسش درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱ مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ✓

۲ برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱ عدد 2^n-1 اوّل است. ✗ (امتحان نهایی شهریور ۹۸)

۳ برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ✗

۴ اگر a و b دو عدد حقیقی باشد و $ab=0$ آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$ ✓

۵ اگر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم: $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ ✗

مثال نقض: $b=1$ و $a=-2$ ؛ $-2<1$ ولی $(-2)^2 \not< (1)^2$

(امتحان نهایی شهریور ۹۹)

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n = ۲k$ $(k \in \mathbb{N})$؛ در این حالت داریم :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k)^۲ - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱$$

که حاصل یک عدد فرد است.

n زوج $\Downarrow$ $\underbrace{n^۲ - ۵n + ۷}_{\text{فرد}}$

ب) n فرد است، یعنی $n = ۲k - ۱$ $(k \in \mathbb{N})$؛ در این حالت هم داریم :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k-۱)^۲ - ۵(۲k-۱) + ۷ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۱۰k + ۵ + ۷$$
$$= ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۳ = ۲(۲k^۲ - ۷k + ۶) + ۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

n فرد $\Downarrow$ $\underbrace{n^۲ - ۵n + ۷}_{\text{فرد}}$

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^۲ - ۵n + ۷$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^۲ - ۵n + ۷$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$p \vee q \Rightarrow r \equiv r \vee \sim (p \vee q)$

$\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$

$\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

تبدیل $\Rightarrow$ به $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

قوانین دمورگان : $\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری : $\begin{cases} r \vee (p \wedge q) \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee q) \\ r \wedge (p \vee q) \equiv (r \wedge p) \vee (r \wedge q) \end{cases}$

تبدیل $\vee$ به $\Rightarrow$: $p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_۱ \vee P_۲ \vee \ldots P_n \Rightarrow r \equiv (P_۱ \Rightarrow r) \wedge (P_۲ \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_n \Rightarrow r)$$

نوع دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $\underbrace{ab = ۰}_{p}$ آنگاه $\underbrace{a = ۰}_{q}$ یا $\underbrace{b = ۰}_{r}$. (امتحان نهایی شهریور ۹۹)

$p \Rightarrow q \vee r$

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a = ۰$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر $a \neq ۰$، در این حالت $a^{-۱}$ (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = ۰$ در $a^{-۱}$ داریم :

$$ab = ۰ \Rightarrow a^{-۱}(ab) = a^{-۱} \times ۰$$
$$\Rightarrow b = ۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

تست در اثبات فرد بودن $n^۲ - ۵x + ۷$ برای هر عدد طبیعی یک‌بار n را فرد و یک‌بار n را زوج در نظر گرفتیم. کدام گزاره هم‌ارزی منطقی است که اثبات را توجیه می‌کند؟

۱) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

۳) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

۴) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

پاسخ ۱

پرسش ثابت کنید:

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (\sim q \wedge p) \Rightarrow r$

پاسخ

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \vee r)$

$\equiv (\sim p \vee q) \vee r$

$\equiv \sim (\sim p \vee q) \Rightarrow r$

$\equiv p \wedge (\sim q) \Rightarrow r$

تست برای اثبات اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$ ثابت کردیم اگر $a \neq ۰$ باشد $b = ۰$ است. کدام گزاره هم‌ارزی منطقی است که این اثبات را توجیه می‌کند؟

۱) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r$

۲) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \vee (\sim q)) \Rightarrow r$

۳) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \vee (\sim q)) \Rightarrow r$

۴) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \wedge (\sim q)) \Rightarrow r$

پاسخ ۱

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است. (امتحان نهایی خرداد ۹۸ خارج)

$$a = ۲k+۱ ,\; b = ۲k'+۱ \Rightarrow \text{فرد } a \text{ و فرد } b \Rightarrow \text{فرد } ab$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ \\ b^۲ = ۴k'^۲ + ۴k' + ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۴k'^۲ + ۴k' + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۲k'^۲ + ۲k + ۲k' + ۱}_{t}) = ۲t$$

ب) $A = \{۳, ۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$. برای حل این مسئله n را ۶ حالت در نظر می‌گیریم. از ۱ تا ۶ ... .

اثبات غیرمستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

تست در برهان خلف برای اثبات $p \Rightarrow q$ ثابت می‌کنیم.

۱) $\sim p \Rightarrow \sim q$

۲) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۳) $\sim p \Rightarrow q$

۴) $\sim q \Rightarrow p$

پاسخ ۲ عکس و نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p$ است که با $p \Rightarrow q$ معادل است.

مثال : ثابت کنید حاصل جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (امتحان نهایی تیر ۹۸ و شهریور ۱۴۰۰)

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

تست در اثبات به روش برهان خلف ثابت می‌کنیم؟

۱) حکم نمی‌تواند درست باشد.

۲) حکم نمی‌تواند نادرست باشد.

۳) فرض نمی‌تواند نادرست باشد.

۴) فرض نمی‌تواند درست باشد

پاسخ ۲

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{۱}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

پرسش با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید:

اگر x یک عدد گنگ باشد $\frac{1}{x}$ نیز عدد گنگ است. (امتحان نهایی خرداد ۹۹ خارج از کشور)

فرض — حکم

پاسخ اثبات با برهان خلف؛ فرض خلف: فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی $\frac{1}{x}$ عدد گنگ نباشد، پس $\frac{1}{x}$ یک عدد گویا است. با توجه به اینکه صورت کسر $\frac{1}{x}$، صفر نیست $\frac{1}{x}$ یک عدد گویای غیرصفر است. معکوس هر عدد گویای غیرصفر یک عدد گویا است، پس:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\frac{1}{x}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

با فرض مسأله یعنی «x یک عدد گنگ است» به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف («$\frac{1}{x}$ گنگ نیست») باطل و حکم («$\frac{1}{x}$ عددی گنگ است») ثابت می‌شود.

مثال : a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3) = (۵-۸)(۸-۱)(۱-۵) = (-۳)(۷)(-۴) = ۸۴$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد؛ امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

ضرب ۳ عدد فقط وقتی فرد است که همگی فرد باشند.

مجموع ۳ عدد فرد، یک عدد فرد است.

چون با $(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)$ مساوی می‌شود و $a_1+a_2+a_3$ همان $b_1+b_2+b_3$ است، و تفاضل دو مقدار مساوی صفر است.

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض خلف: $f+g$ در $x=a$ پیوسته است. با توجه به پیوسته بودن f در $x=a$ (فرض)، $(f+g)-f$ یعنی تفاضل دو تابع پیوسته در $x=a$ نیز، در $x=a$ پیوسته است. پیوسته بودن $(f+g)-f=g$ در $x=a$، با فرض در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $Q \Leftrightarrow R$ و $P \Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b \in \mathbb{R})$ ، $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست نیست (چرا؟)

$$a=b \Leftrightarrow a^3=b^3 \begin{cases} a=b \Rightarrow a^3=b^3 & \text{بدیهی} \\ a^3=b^3 \Rightarrow a=b \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع $f(x)=x^3$ یک تابع یک به یک است.

$$a^3=b^3 \Rightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$$

$$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2 \equiv \begin{cases} a=b \Rightarrow a^2=b^2 & ✓ \\ a^2=b^2 \Rightarrow a=b & ✗ \end{cases}$$

مثال نقض برای $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$:

$(۲)^2=(-۲)^2$ است ولی $۲ \neq -۲$

در حسابان دیده‌اید که $f(x)=x^3$ یک تابع اکیداً صعودی است پس:
$a<b \Rightarrow f(a)<f(b) \Rightarrow a^3<b^3$
معکوس هر تابع اکیداً صعودی هم اکیداً صعودی است یعنی:
$a^3<b^3 \Rightarrow f^{-1}(a)<f^{-1}(b) \Rightarrow a<b$

۱ $a<b \Rightarrow a^2<b^2$
مثال نقض: $1<2-$ است ولی $(-2)^2 \not< (1)^2$
۲ $a^2<b^2 \Rightarrow a<b$
مثال نقض: $(1)^2<(-2)^2$ است ولی $1 \not< 2-$

کار در کلاس

اگر $a,b\in\mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ ✗ ب) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$ ✓

مثال : اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\geq 2$ (امتحان نهایی تیر ۹۸ و دی ۹۸)

اگر $a>0$، داریم : $a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟ $(a^2+1\geq 2a)$

چون دو طرف نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب (تقسیم) کرده‌ایم.

همچنین $a^2+1\geq 2a \;\Leftrightarrow\; a^2+1-2a\geq 0$

و درنهایت : $a^2+1-2a\geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-1)^2\geq 0$

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2\geq 0$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است.
پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a>0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$$
$$\Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست. (امتحان نهایی خرداد ۹۸ و شهریور ۹۹)

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2}$ $\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0 \quad \text{گزاره همیشه درست.}$$

مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^2+ab+b^2\geq 0$

حل : راه اول: $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$

$(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2)+\frac{3}{4}b^2\geq 0 \Leftrightarrow$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه سوم: $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2+(\frac{1}{4}a^2+ab+b^2)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2+(\frac{1}{2}a+b)^2\geq 0$ همواره درست است.

راه دوم:

$$a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2\geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

n^2 زوج $\Leftrightarrow$ n زوج

۱) n^2 زوج $\Rightarrow$ n زوج (روش اثبات: مستقیم)

$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2 \Rightarrow \cdots$

۲) n^2 زوج $\Rightarrow$ n زوج (روش اثبات: برهان خلف)

فرض خلف: اگر n زوج نباشد، n فرد است

$n=2k+1\Rightarrow\cdots$

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟ بله

اگر n زوج باشد n^k هم زوج است و برعکس، یعنی توان، زوج یا فرد بودن عدد را تغییر نمی‌دهد.

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟ بله

۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

در هندسه خوانده‌اید که مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AB است. یعنی: فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است. $\Leftrightarrow$ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم علامت باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (امتحان نهایی خرداد ۹۹)

یعنی xy مثبت است

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ همواره درست

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$ همیشه درست

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$$ همیشه درست

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3<x^2$.

مثال۱: $x=\frac{1}{2}$ مثال۲: $x=-1$

در حالت کلی اگر $0<x<1$ یا $x<-1$ آن‌گاه $x^3<x^2$

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند. (نهایی دی ۹۹)

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$ (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

$x=0$ یا $y=0$ باشد.

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a+b)\neq 0$ نه، ثابت می‌کنیم با یک گزاره همیشه نادرست معادل است.

$$(a+b\neq 0) \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2=ab \Leftrightarrow a^2+ba+b^2=0$$ همواره نادرست

چراکه اگر a را متغیر و b را معلوم فرض کنیم $\Delta=b^2-4b^2<0$ و a^2+ba+b^2 هرگز صفر نمی‌شود.

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

$$(2k+1)^2=k^2+4k+1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{t}+1=2t+1$$
$$(2k+1)^3=8k^3+4k^2+2k+1$$
$$=2(4k^3+2k^2+k)+1=2t+1$$

حرف کلی‌تر: به توان رساندن یک عدد، زوج یا فرد بودن آن را تغییر نمی‌دهد.

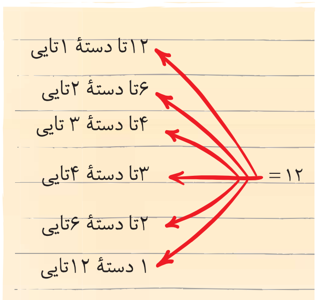
ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

حل: میانگین $\underbrace{a-2, a-1, a, a+1, a+2}_{\text{۵ عدد متوالی}}$ عدد وسطی یعنی a است.

$$\frac{a-2+a-1+a+a+1+a+2}{5}=\frac{5a}{5}=a$$

$\alpha+2\beta$: برهان خلف، اگر $\alpha+2\beta$ گویا باشد با توجه به فرض گویا بودن $\alpha+\beta$ و با توجه به اینکه تفاضل دو عدد گویا، گویا است $(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)$ یعنی β نیز گویا است که با فرض گنگ بودن β در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم، یعنی گنگ بودن $\alpha+2\beta$ ثابت است.

$\alpha-\beta$: برهان خلف، اگر $\alpha-\beta$ گویا باشد با توجه به فرض گویا بودن $\alpha+\beta$ و بسته بودن مجموعه اعداد گویا نسبت به جمع (یعنی جمع دو عدد گویا یک عدد گویا است) $(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$ یعنی 2α گویا است. در نتیجه α نیز گویا است که با فرض گنگ بودن α در تناقض است پس فرض خلف باطل و $\alpha-\beta$ گنگ است.



درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

$\mathbb{Z} = \{۰, \pm۱, \pm۲, ...\}$

باقی‌مانده صفر باشد.

قرار دادن تعدادی شیء، در دسته‌های مساوی، یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

عاد کردن

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۲|۱۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر تا کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸− بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، ۲۸−=۴×(۷−)) یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸− بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a، که ~~مخالف صفر است~~[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود. قرارداد نیست! چون میشه ثابتش کرد.

اثبات: طبق تعریف، عدد صحیح q وجود دارد که $۰ = ۰q$. برای هر عدد صحیح q، $۰q = ۰$ برقرار است پس $۰|۰$.

نکته

شمردن به علامت بستگی ندارد. (در تمرینات صفحه ۱۶ ثابت می‌کنیم)

$a|b \to a|-b,\ -a|b,\ -a|-b$

تست مثال کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

۱) $a|b-c \Leftrightarrow a|c-b$ ۲) $-a|b \Leftrightarrow a|b$

۳) $a|b-c \Leftrightarrow a|b+c$ ۴) $a|-b \Leftrightarrow a||b|$

پاسخ ۳ مثال نقض برای گزینه ۳:

$(\Rightarrow)\ a=۳, b=c=۲$

$(\Leftarrow)\ a=۳, b=-c=۲$

$۳|۰$ ولی $۳ \nmid ۴$

نکته

۱ همهٔ اعداد صفر را می‌شمارند و تنها عددی که توسط همهٔ اعداد شمرده می‌شود صفر است.

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a|b \to b=۰$

تست برای هر عدد $n \in \mathbb{Z}$ داریم $n|a^۲+۳a-۴$ مجموع مقادیر صحیحی که می‌تواند جایگزین a شود کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۴ ۴) ۴−

پاسخ ۲

۲ صفر، هیچ عددی، به‌جز صفر را نمی‌شمارد، یعنی اگر عددی توسط صفر شمرده شد باید صفر باشد. $۰|a \to a=۰$

تست هرگاه $۰|۲a^۳-۳a^۲+a$ مجموع مقادیر صحیح و نامنفی که می‌تواند جایگزین a شود، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۲

$$۲a^۳-۳a^۲+a=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \checkmark \\ a=۱ \checkmark \\ a=\frac{۱}{۲} \times (\frac{۱}{۲}\text{عدد صحیح نیست}) \end{cases} \to ۰+۱=۱$$

۳ ±۱ همهٔ اعداد را می‌شمارند. تنها عددی که همهٔ اعداد را می‌شمارند ±۱ هستند.

تست اگر به ازای هر n، $m^۲-۳m+۱|n$ آن‌گاه m چند حالت مختلف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

پاسخ ۴

$m^۲-۳m+۱=\pm۱ \to m=۰,۱,۲,۳$

۴ به‌جز ±۱ هیچ عددی ±۱ را نمی‌شمارد.

تست چند عدد صحیح می‌توان جای m قرار داد تا $m^۲-۳|-۱$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

پاسخ ۲

$$m^۲-۳=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} m=\pm۲ \checkmark \\ m=\pm\sqrt{۲} \times \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳= ۹ \times ۷$

ب) $۹۱=۷\times ۱۳ \Leftrightarrow ۱۳ |۹۱$ و $۹۱|۷$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴ = ۹ \times (-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵ = ۵ \times (-۷)$

ث) $۰=۱۸\times ۰ \Leftrightarrow ۱۸| ۰$ ← همهٔ اعداد صفر را می‌شمارند. ← در صفحهٔ قبل گفتیم

ج) $a|۱ \Rightarrow a = ۱$ یا $a = -۱$ ← اگر عددی ۱ را بشمارد یا ۱ است یا ۱−

چ) $۲۶=۲\times ۱۳ \Rightarrow ۲| ۲۶$ و $۱۳ |۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید :

$$\forall m,n \in \mathbb{N}; m \le n \Rightarrow a^m \mid a^n \xleftarrow{q=a^{n-m}\in\mathbb{Z}} a^n = a^m \times a^{n-m} \leftarrow n-m \ge ۰ \leftarrow n \ge m$$

$$(۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵ \mid ۳^۹)$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$ عکس درست نیست

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times ۵ , ۳|۶\times ۴ , ۳|۶\times (-۷) , \dots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی :

$$\begin{cases} \text{(الف)}\ a|b \Rightarrow a|b^۲ \\ \text{(ب)}\ a|b \Rightarrow a|b^n \end{cases}$$ عکس این‌ها درست نیست.

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۶\times ۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times ۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid ۵$

ج) $۶|۳\times ۴$ و $۶\nmid ۳$ و $۶\nmid ۴$

در حالت کلی از $a|bc$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$.

ولی اگر a یک عدد اول باشد و $a|bc$ آن‌گاه: $a|b$ یا $a|c$.

نتیجه: اگر a عدد اول و $a|bc$ و $a\nmid b$ آن‌گاه: $a|c$.

صفحه بعد برای حل سؤال کنکور سراسری ۹۸ از این استفاده می‌کنیم هر جا * را دیدید یعنی از این نتیجه استفاده کرده‌ایم.

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b = aq \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb = kaq \Rightarrow ka \mid kb$$

در حالت کلی اگر $a|b \Leftarrow ka|kb$ درست است، ولی عکس آن فقط یک مثال نقض دارد آن‌هم $k=۰$ است یعنی:

$$\begin{cases} ka|kb \Rightarrow kb = kaq \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b = aq \Rightarrow a \mid b \\ k \ne ۰ \end{cases}$$

چون $k \ne ۰$ است.

اگر $ka|kb$ و $k\ne ۰$ آنگاه $a|b$

اگر $a|b$:

۱) b را در هر عددی که دلمان خواست می‌توانیم ضرب کنیم: $a|b \to a|bc$

۲) اگر a به c تقسیم‌پذیر بود می‌توانیم به c تقسیمش کنیم: $a=c\times d|b \to d|b$

تست کدام گزینه مثال نقض برای «$a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$» است.

۱) $a=۴$ ، $b=۳$ و $c=۱۲$

۲) $a=۴$ ، $b=۳$ و $c=۶$

۳) $a=۶$ ، $b=۸$ و $c=۹$

۴) $a=۶$ ، $b=۴$ و $c=۱۸$

پاسخ ۳

مثال نقض برای سؤال روبه‌رو

$a=۶ , b=۳ , c=۴$

$a=۶|b\times c=۳\times ۴$ ولی $۶\nmid ۳ , ۶\nmid ۴$.

تست هرگاه $n\in\mathbb{Z}$ و $۳n \mid (n-۱)n$ کدام نتیجه‌گیری درست <u>نیست</u>؟

۱) $۳|n^۲-n$ ۲) $n|n^۲-n$

۳) $۳n|n^۳-n$ ۴) $۳|n-۱$

پاسخ ۴ بررسی گزینه ها:

۱و۲) $۳n \mid (n-۱)n \xrightarrow{\text{حذف n از طرف اول}} ۳\cancel{n} \mid \underbrace{(n-۱)n}_{n^۲-n}$ ✓

$\xrightarrow{\text{حذف ۳ از طرف اول}} \cancel{۳}n \mid \underbrace{n-۱\ n}_{n^۲-n}$ ✓

۳) $۳n \mid (n-۱)n \xrightarrow{\times n \text{ طرف دوم}} ۳n \mid \underbrace{(n-۱)n^۲}_{n^۳-n^۲}$ ✓

۴) $۳\cancel{n} \mid (n-۱)\cancel{n}$ ✗ حذف n ، از دو طرف، غیرقانونی است. تنها مثال نقض $n=۰$ است

تست از گزاره‌های زیر چند گزاره صحیح است؟

الف) $a|b \Rightarrow a|bc$ ب) $ab|c \Rightarrow a|c$

پ) $a|bc \Rightarrow a|b$ یا $a|c$ ت) $a|b \Rightarrow ma|mb$

ث) $a|b^۲ \Rightarrow a|b$ ج) $ma|mb \Rightarrow a|b$

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ ۲ «الف»، «ب» و «ت» همواره درست و «پ»، «ث» و «ج» نادرستند. برای نادرست‌ها مثال نقض بزنید.

تست $x \mid y+1$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $x \mid y^2-1$ ۲) $x \mid y^3+1$ ۳) $x \mid y^3-1$ ۴) $x \mid y^4-1$

پاسخ ۳

۱) $(y+1)(y-1)=y^2-1 \to y+1 \mid y^2-1 \xrightarrow{x \mid y+1} x \mid y^2-1$ ✓

۲) $(y+1)(y^2-y+1)=y^3+1 \Rightarrow y+1 \mid y^3+1 \xrightarrow{x \mid x+1} x \mid y^3+1$ ✓

۴) $(y+1)(y-1)(y^2+1)=y^4-1 \Rightarrow y+1 \mid y^4-1 \xrightarrow{x \mid y+1} x \mid y^4-1$ ✓

مثال نقض گزینهٔ «۳»: اگر $y=-1$ و $x=3$ باشد $\underbrace{3 \mid -1+1}_{0}$ ولی $\underbrace{3 \nmid -1-1}_{-2}$

ویژگی ۱ را می‌شود با کمک ویژگی ۲ هم ثابت کرد ببینید:

$\left.\begin{matrix} a \mid b \text{ فرض} \\ b \mid mb \text{ بدیهی} \end{matrix}\right\} \to a \mid mb$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

مثال $2 \mid 6\,,\,6 \mid 60 \to 2 \mid 60$

$$\boxed{a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c}$$

اثبات: $\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq_1 \quad (1) \\ b \mid c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$

$c = bq_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} c = aq_1q_2 \overset{q_1q_2=q}{\Rightarrow} c = a\cdot q \Rightarrow a \mid c$

$b = aq_1$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال: با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که:

$a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a \mid b \text{ :طبق فرض} \\ b \mid b^n \text{ :و می‌دانیم} \end{matrix}\right\} \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a \mid b^n$

اثبات: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc$

ویژگی ۱ $\downarrow \quad \downarrow$

$a \mid mb \wedge a \mid nc$ ویژگی ۳

ویژگی ۱ + ویژگی ۳

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a \mid b \Rightarrow b = a \times q_1 \\ a \mid c \Rightarrow c = aq_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q} \Rightarrow a \mid b \pm c$

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b$ یا $a \mid c$؟ نه، مثال نقض: $2 \mid 3+5$ ولی $2 \nmid 3\,,\,2 \nmid 5$

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \le |b|$. $q \in \{\pm1, \pm2, \dots\}$

اثبات: چون $a \mid b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \ge 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

اگر $q = 0$ با توجه به اینکه $b = aq$ پس $b = 0$ که خلاف فرض است.

$1 \le |q| \overset{\times |a|}{\Rightarrow} \underbrace{|a| \times 1}_{|a|} \le |a||q| \Rightarrow |a| \le \underbrace{|aq|}_{|b|} \Rightarrow |a| \le |b|$

نتیجه: اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ آنگاه $a = \pm b$.

~~اثبات~~: $\left.\begin{matrix} a \mid b \overset{(4)}{\Rightarrow} |a| \le |b| \\ b \mid a \overset{(4)}{\Rightarrow} |b| \le |a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

اثبات: ۱) اگر a, b مخالف صفر باشند.

۲) اگر $a = 0$ با توجه به اینکه $0 \mid b$ پس $b = 0$.

۳) اگر $b = 0$ با توجه به اینکه $0 \mid a$ پس $a = 0$، یعنی در هر ۳ حالت $a = \pm b$.

کار در کلاس

مثال مهم:

۱ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

لازم نبود بگویید!

$\left.\begin{matrix} a \mid 7m+6 \overset{\times 6}{\Rightarrow} a \mid 42m+36 \\ a \mid 6m+5 \overset{\times 7}{\Rightarrow} a \mid 42m+35 \end{matrix}\right\} \overset{\text{ویژگی ۳}}{\Rightarrow} a \mid (42m+36)-(42m+35)$

چون $7m+6$ و $6m+5$ صفر نیستند. و فقط صفر توسط صفر شمرده می‌شود.

$\Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$ (چرا؟)

اگر عددی ۱ را بشمارد، ۱+ یا ۱− است.

تست به ازای بعضی مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha \mid 13n+3$ و $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq \pm 1$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ ۲

$\alpha \mid 13n+3 \xrightarrow[\text{ویژگی ۱}]{\times 7} \alpha \mid 91n+21$

$\alpha \mid 7n+4 \xrightarrow{\times 13} \alpha \mid 91n+52$

$\xrightarrow[\text{ویژگی ۳}]{-} \alpha \mid \underbrace{91n+21-(91n+52)}_{-31}$

$\Rightarrow \alpha \mid 31 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \ ✗ \\ \alpha = \pm 31 \ ✓ \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \alpha = 31 \mid 7n+4 \\ 31 \mid 31 \text{ بدیهی} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 31 \mid \underbrace{7n+35}_{7(n+5)}$

$\xrightarrow[31 \nmid 7 \text{ ، } 31 \text{ اول}]{p \mid ab \to p \mid a \text{ یا } p \mid b} 31 \mid n+5$

$n+5 = 31k \to n = 31k-5$

$n \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{کوچک‌ترین}]{k=1} n_{min} = 31-5 = 26$

تست به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha \mid 11n+3$، $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq 1$ آنگاه تعداد اعداد دورقمی n در این حالت کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ ۳

پرسش اگر $a > 1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید عددی a عدد اول است. (نهایی دی ۹۷ و شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ

$\left.\begin{matrix} a \mid 9k+4 \xrightarrow[\text{ویژگی ۱}]{\times 5} a \mid 45k+20 \\ a \mid 5k+3 \xrightarrow{\times 9} a \mid 45k+27 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[-]{\text{ویژگی ۳}}$

$a \mid \underbrace{(45k+27)-(45k+20)}_{7} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \ ✗ \\ a = 7 \ ✓ \end{cases}$

پرسش اگر $n \mid 9k+7$ و $n \mid 7k+6$ ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$ (نهایی خرداد ۹۹)

پرسش اگر $a \mid 5m-2$ و $a \mid 3m+1$، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟ (نهایی خرداد ۹۹ خارج)

پرسش فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که $a \mid 3n+4$ و $a \mid 2n+3$ نشان دهید $a = 1$. (نهایی شهریور ۹۹)

در حالت کلی‌تر داریم: $a^n | b^m \,,\, \frac{m}{n} \le \frac{k}{t} \Rightarrow a^t | b^k$

تست اگر $a^3 | b^8$، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a | b$ ۲) $a | b^2$

۳) $a^4 | b^9$ ۴) $a^2 | b^7$

پاسخ ۴

پرسش درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید (نهایی خرداد ۹۸ خارج)

اگر $a^2 | b^3$ آن‌گاه $a | b$ ✗

مثال نقض: اگر $a = 8$ و $b = 4$؛ $\underbrace{a^2}_{64} | \underbrace{b^3}_{64}$ ولی $\underbrace{a}_{8} \nmid \underbrace{b}_{4}$.

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \Rightarrow b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$ ($q^n = q'$)

عکس این رابطه هم درست است یعنی: $a^n | b^n \Rightarrow a | b$. اثبات: برهان خلف ...

پرسش اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $5 | 4k+1$ ثابت کنید.

$25 | 16k^2 + 28k + 6$

(نهایی تیر ۹۸ـ تمرین ۴ صفحه ۱۶)

پاسخ

$5 | 4k+1 \xrightarrow{\uparrow 2} 25 | 16k^2 + 8k + 1$

$5 | 4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25 | 20k + 5$

$\xrightarrow[\text{ویژگی ۳}]{+} 25 | 16k^2 + 28k + 6$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

عکس این رابطه درست نیست یعنی: ~~$ac | bd \Rightarrow a | b$ یا $c | d$~~.

$$\left.\begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\times} b \times d = (a \times c)\underbrace{(q_1 q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow b \times d = a \times c \times q \Rightarrow ac \,|\, bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید.)

صفحه قبل این را گفتیم و اثبات کردیم.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

پس ۱ عدد اول نیست.

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=1$ یا $a=p$.

$a | p \to a = 1$ یا $a = p$

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

$a \,|\, 9k+7 \Rightarrow a \,|\, 7 \times (9k+7)$

$\Rightarrow a | 63k + 49$ (I)

$a \,|\, 7k+6$

$\Rightarrow a \,|\, 9 \times (7k+6) \Rightarrow a | 63k + 54$ (II)

ویژگی ۳

$\text{II} - \text{I} \Rightarrow a | (63k + 54) - (63k + 49)$

تعریف عدد اول

$\Rightarrow a | 5 \Rightarrow a = 1$ یا $a = 5$.

عدد اول

$2 | 100! \xrightarrow{\text{ویژگی ۳}} 2 | 100! + 2$

$2 | 2$

به ۲ بخش‌پذیر است.

$3 | 100! \xrightarrow{\text{ویژگی ۳}} 3 | 100! + 3$

$3 | 3$

به ۳ بخش‌پذیر است.

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت: $\forall k \le n \,,\, k | n!$؛ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ و ... و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم: $7|100!$ و $7|7 \Rightarrow 7|100!+7$)

تست تعداد عضوهای $\{n : 65 | 2^n + 1\}$ از مجموع اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟ (کنکور قدیم‌ها)

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ ۳ $65 | 2^n + 1 \to 2^6 + 1 | 2^n + 1 \to$ n باید ضریب فردی از ۶ باشد

$|\{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, \ldots, 6 \times 15\}| = 8$

نکته

$\left.\begin{array}{ll} \forall n & a-b | a^n - b^n \\ \forall n \text{ فرد} & a+b | a^n + b^n \\ \forall n \text{ زوج} & a+b | a^n - b^n \\ & a-b \nmid a^n + b^n \end{array}\right\}$

برای پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م دو عدد، دو عدد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم.
ب.م.م، عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان و ک.م.م، کلیه عوامل با بزرگ‌ترین توان است.

$$\begin{cases} a = ۱۲ = ۲^۲ \times ۳^۱ \\ b = ۹۰ = ۲^۱ \times ۳^۲ \times ۵^۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (a , b) = ۲ \times ۳ = ۶ \\ [a , b] = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ = ۱۸۰ \end{array}$$

$[۱۲ , \underbrace{(۶ , ۸)}_{۲}] = ۱۲$ (نهایی تیر ۹۸)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $d|a , d|b$ ← d مقسوم‌علیه مشترک a , b است. ← d هم مقسوم‌علیه a است و هم b .

ب) $\forall m \cancel{>0} : m|a , m|b \Rightarrow m \le d$ ← d از مقسوم‌علیه‌های دیگر a , b بزرگ‌تر است ← اگر m مقسوم‌علیه مشترک a , b باشد $m \le d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم $(a,b) = ۱$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند. ← متباین

مثال : $(۳,۴) = ۱ \quad , \quad (۴,۹) = ۱ \quad , \quad (۷,۱۱) = ۱ \quad , \quad (۱,۱۲) = ۱$

$(۶,۹) = ۳ \quad , \quad (۸,۱۶) = ۸ \quad , \quad (۰,۶) = ۶ \quad , \quad (۴,-۶) = ۲$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b] = c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $a|c , b|c$ ← c مضرب مشترک a , b است ← c هم مضرب a است هم مضرب b

ب) $\forall m > ۰ , a|m , b|m \Rightarrow c \le m$ ← c از هر مضرب‌مشترک مثبت دیگری کوچک‌تر است ← اگر m مضرب مشترک مثبت a , b باشد $c \le m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال : $[۳,۴] = ۱۲ \quad , \quad [۶,۴] = ۱۲ \quad , \quad [۱,۸] = ۸ \quad , \quad [-۴,۱۶] = ۱۶$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \overset{a \neq ۰}{\Rightarrow} (a,b) = |a|$ (نهایی شهریور ۱۴۰۰)

ب) $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a$ و $|a|\,|b$ و نیز برای هر $m \cancel{>0}$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $m \le |a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب) باید نشان دهیم که $a\,|\,|b|$ و $b\,|\,|b|$ و نیز برای هر $m > ۰$ که $a|m$ و $b|m$ نشان دهیم: $|b| \le m$.

$$\text{اثبات الف:} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{بدیهی } a|a \to |a|\,|\,a \\ \text{فرض: } a|b \to |a|\,|\,b \end{array} \right\} \text{(شرط ۱)} \\ m|a \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} m \le |a| \quad \text{(شرط ۲)} \end{array} \right\} \to (a,b) = |a|$$

$$\text{اثبات ب:} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{بدیهی } b|b \to b\,|\,|b| \\ \text{فرض: } a|b \to a\,|\,|b| \end{array} \right\} \text{(شرط ۱)} \\ b|m , m > ۰ \Rightarrow |b| \le m \quad \text{(شرط ۲)} \end{array} \right\} \Rightarrow [a , b] = |b|$$

اگر فقط $b = ۰$ باشد $(a \neq ۰)$

همهٔ اعداد صفر را می‌شمارند $\Rightarrow a|۰ \to (a , ۰) = |a|$

ولی اگر هر دوی a , b صفر باشند، (a , b) یعنی بزرگ‌ترین عددی که صفر (و صفر) را می‌شمارد، چون همهٔ اعداد صفر را می‌شمارند؛ بزرگ‌ترین وجود ندارد، یعنی: ب.م.م صفر و صفر تعریف‌نشده است.

تست $[(۶۲۷ , ۴۲۹) , ۱۵۴]$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸

۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

پاسخ ۱

$$\begin{array}{l} ۶۲۷ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۹ \\ ۴۲۹ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۳ \end{array} \Rightarrow (۶۲۷ , ۴۲۹) = ۳ \times ۱۱$$

$$۱۵۴ = ۲ \times ۷ \times ۱۱ \Rightarrow [\underbrace{(۶۲۷ , ۴۲۹)}_{۳\times۱۱} , ۱۵۴] = \underbrace{۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱}_{۴۶۲}$$

تست حاصل عبارت مقابل کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (نهایی خرداد ۹۸ خارج)

$([m^۲ , m] , m^۵) =$

الف) m ب) $m^۰$ ج) $m^۵$ د) $m^۲$

پاسخ د

$m | m^۲ \to [m^۲ , m] = m^۲$

$m^۲ | m^۵ \to ([m^۲ , m] , m^۵) = m^۲$

در کتاب درسی نیامده، ولی چون در کنکور ۹۹ از آن سؤال آمده! بدانید که:

۱ اگر $(a , b) = d$ باشد $a = a'd$ و $b = b'd$ است که $(a' , b') = ۱$.

۲ $|a \times b| = (a , b) \times [a , b]$ در نتیجه:

$$[a , b] = \frac{|a \times b|}{(a , b)}$$

۳ از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $a , b \in \mathbb{N}$ آن‌گاه:

$[a , b] = a'b'd$

۴ $(a , b) = (a , b + ka)$

تست کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد تفاضل آن دو عدد کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۴۲ ۲) ۴۸

۳) ۵۲ ۴) ۵۶

$[a , b] = ۶۰d \xrightarrow{[a , b]=a'b'd} a'b' = ۶۰$

$\xrightarrow{(a' , b')=۱} (a' , b') = \begin{cases} (۱ , ۶۰) \\ (۳ , ۲۰) \\ (۴ , ۱۵) \\ \boxed{(۵ , ۱۲)} \end{cases}$ باید ببینیم جمع کدام ۱۳۶ را می‌شمارد

$a + b = ۱۳۶ \to (a' + b')d = \underbrace{۱۳۶} \to$

$a' = ۵ , b' = ۱۲ \Rightarrow ۱۷ \times d = ۱۳۶$

$d = ۸ \Rightarrow \begin{array}{l} a = ۵ \times ۸ \\ b = ۱۲ \times ۸ \end{array} \Rightarrow a - b = ۵۶$

پرسش بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $4k$ و $16k^2-1$ را بیابید؟ (نهایی خارج خرداد ۹۹)

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 16k^2-1 \\ d \mid 4k \xrightarrow[\text{ویژگی ۱}]{\times 4k} d \mid 16k^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ویژگی ۳}]{-} d \mid 1 \to d=1$$

۲ اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ ، $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a)=1$

فرض کنیم $(p,a)=d$

$d \mid p \overset{\text{اول } p}{\Rightarrow} d=1$ یا $d=p$

$d \mid a$ ①

اگر $d=p \overset{①}{\Rightarrow} p \mid a$ (و این با فرض $p\nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d=1$ یا $(p,a)=1$.

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد: مثال: $4\nmid 6$ ولی $(4,6)=2\neq 1$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b\nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم. $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a=bq+r$ و $0\le r<b$

① باقی‌مانده منفی نیست.

② باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کوچک‌تر است.

مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت، باقی‌مانده

مثال: اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم: $q=3$ و $r=4$، و به عبارت دیگر $25=(7\times3)+4$. حال اگر -25 را بر ۷ تقسیم کنیم و $q=-3$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-25=7\times(-3)-4$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-4) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم:

$$-25 \,\lfloor 7 \quad -21 \;\; -3 \quad -4 \to \text{نباید منفی باشد}$$

$$\Rightarrow -25 \,\lfloor 7 \quad -21 \;\; -4 \quad -3-1 \quad 3 \quad 7-4$$

$$-25=7\times(-3)-4=7\times(-3)-4-7+7$$

$$=7\times(-3)-7+3=7\underbrace{[(-3)-1]}_{q}+3=7q+3\Rightarrow r=3$$

تذکر: همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید. (نهایی شهریور ۹۹ ورودی ۹۹)

حل:

$$\begin{array}{l} \text{طبق فرض}: m=17q_1+5 \xrightarrow{\times 2} 2m=2\times17q_1+10 \\ \text{طبق فرض}: n=17q_2+3 \xrightarrow{\times(-5)} -5n=(-5)\times17q_2-15 \end{array} \overset{+}{\Rightarrow} 2m-5n=17\times2q_1+17\times(-5q_2)+10-15$$

$\Rightarrow (2m-5n)=17(2q_1-5q_2)-5$ باقی‌مانده نباید منفی باشد

تست اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^2+9n+21$ و $n+7$ کدام است؟ (سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۱ و ۳

۳) ۱ و ۵ ۴) ۷

پاسخ ①

تست اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟ (خارج ۸۸)

۱) ۵۹ ۲) ۶۷

۳) ۱۳ ۴) ۸۹

پاسخ ①

نکته

① $a \,\lfloor b \;\; q \;\; r\neq0 \Rightarrow -a \,\lfloor b \;\; -q-1 \;\; b-r$

② $a \,\lfloor b \;\; q \;\; 0 \Rightarrow -a \,\lfloor b \;\; -q \;\; 0$

پرسش در تقسیم عدد -127 بر ۱۵ باقی‌مانده برابر ۸ و خارج‌قسمت -9 است. (نهایی خرداد ۹۸ خارج)

پاسخ

$$127 \,\lfloor 15 \quad 120 \;\; 8 \quad 7 \Rightarrow -127 \,\lfloor 15 \quad -8-1 \quad 15-7$$

خارج‌قسمت -9، باقی‌مانده 8

دلیل:

$127=15\times8+7 \to -127=15\times(-8)-7$

$\Rightarrow -127=\underline{15\times(-8)-15}+\underline{15-7}$

$-127=15\times\boxed{(-8-1)}+8$ باقی‌مانده

خارج‌قسمت

پرسش اگر باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد باقی‌ماندهٔ $2a-1$ تقسیم بر ۳۱ را به‌دست آورید؟ (نهایی خرداد ۹۹ خارج)

پاسخ

$a=31q+19 \xrightarrow{\times2} 2a=31\times2q+38 \xrightarrow{-1}$

$2a-1=31\times2q+37 \xrightarrow{\text{باقی‌مانده}>\text{مقسوم‌علیه}} 2a-1=31\times2q+31+6$

از ۳۱ فاکتور می‌گیریم

$\Rightarrow 2a-1=31(2q+1)+6$ باقی‌مانده

پرسش اگر باقی‌مانده تقسیم m, n بر ۱۳ به‌ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را به‌دست آورید. (نهایی خرداد ۹۹)

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} m=13q_1+2 \xrightarrow{\times(-3)} -3m=13\times(-3q_1)-6 \\ n=13q_2+9 \xrightarrow{\times5} 5n=13\times(5q_2)+45 \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$5n-3m=13\times(5q_2)+13(-3q_1)+45-6$

$\Rightarrow 5n-3m=13(5q_2-3q_1)+39 \xrightarrow{\text{باقی‌مانده از مقسوم‌علیه بزرگ‌تر است } (39>13)}$

$5n-3m=13(5q_2-3q_1)+13\times3 \Rightarrow 5n-3m=13(5q_2-3q_1+3)+0$ باقی‌مانده

به اندازهٔ مقسوم‌علیه اضافه و کم می‌کنیم.

از ۱۷ فاکتور می‌گیریم

$$=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۵-۱۷+۱۷=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۱۷-۵+۱۷$$

$$=۱۷(\underbrace{۲q_۱-۵q_۲-۱}_{q_۳})+۱۷-۵$$

بهتر بود در یک مرحله به جای $۲q_۱-۵q_۲-۱$ متغیر q را قرار دهیم.

$$\Rightarrow(۲m-۵n)=۱۷(\underbrace{q_۳-۱}_{q})+۱۲$$

$$=۱۷q+۱۲\Rightarrow r=۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی، b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰\le r<b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r=۰$، یا باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا ... یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر $a=۵k$ یا $a=۵k+۱$ یا ... یا $a=۵k+۴$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

$$b \text{ حالت}\begin{cases}a=bq+۰\\a=bq+۱\\\vdots\\a=bq+(b-۱)\end{cases}$$

مسئلهٔ ۱ : اگر $m\in\mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k+۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m=۲k+r\ ,\ ۰\le r<۲\Rightarrow m=۲k \text{ یا } m=۲k+۱$$

مسئلهٔ ۲ : ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p=۶k$ (۱) $\to p=۲(۳k)$ زوج

$p=۶k+۱$ (۲) $\to ۷,۱۳,۱۹,۲۵,۳۱,۳۷,\dots$ اعداد اول به‌صورت $۶k+۱$

$p=۶k+۲$ (۳) $\to p=۲(۳k+۱)$ زوج

$p=۶k+۳$ (۴) $\to p=۳(۲k+۱)$ مضرب ۳

$p=۶k+۴$ (۵) $\to p=۲(۳k+۲)$ زوج

$p=۶k+۵$ (۶) $\to ۵,۱۱,۱۷,۲۳,۲۹,۳۵,۴۱,\dots$ اعداد اول به‌صورت $۶k+۵$ یا $۶k-۱$

$۶k-۱$

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم : $p=۳(۲k+۱)$ یا $p=۳k'$ که $p|۳$ یا p با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۲۵=۶\times۴+۱)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئلهٔ۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t+۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

پرسش ثابت کنید، حاصل‌ضرب دو عدد متوالی، زوج است.

پاسخ حالت ۱:

$$a=۲k\to a(a+۱)=۲\underbrace{k(۲k+۱)}_{t}=۲t \text{ زوج}$$

حالت ۲:

$$a=۲k+۱\to a(a+۱)=(۲k+۱)(۲k+۲)$$

$$=۲\underbrace{(۲k+۱)(k+۱)}_{t'}=۲t' \text{ زوج}$$

اعداد اول دوقلو: اگر تفاضل ۲ عدد اول ۲ باشد آن دو عدد اول را **دوقلو** می‌گویند. مثل:

(۵ و ۷)، (۹ و ۱۱)، (۱۷ و ۱۹)

از آن‌جایی که اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ به‌صورت $۶k+۱$ و $۶k+۵$ $(۶k-۱)$ هستند. در اعداد اول دوقلو، عدد کوچک‌تر به‌صورت $۶k-۱$ و عدد اول بزرگ‌تر به صورت $۶k+۱$ است و مجموع دو عدد اول دوقلو بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

نکته

بیشتر بدانیم: در حالت کلی هر عدد فرد به‌توان زوج به صورت $۸t+۱$ است و باقی‌مانده عدد فرد a به توان هر عدد فردی، بر ۸ با باقی‌مانده a بر ۸، برابر است.

مثال: باقی‌مانده $۳^{۶۱۰}$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ ۱ باقی‌مانده بر ۸: $۳^{۶۱۰}=۸k+۱$ ؛ ۶۱۰ زوج، ۳ فرد

حل : روش اول فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=۴k$ (۱)

$a=۴k+۱$ (۲)

$a=۴k+۲$ (۳)

$a=۴k+۳$ (۴)

روش دوم

$a \to a=۲k+۱ \to a^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}+۱$ فرد

$=۴\times ۲t+۱=۸t+۱$ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی $=۲t$

(چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k\}$ و $A_۲=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۱\}$ و $A_۳=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۳\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.) ثابت کردیم

حالت‌های $۴k$ و $۴k+۲$ زوج بوده و لذا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$ فرد هستند.

اگر $a=۴k+۱ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۸k+۱=۸\,\underbrace{(۲k^۲+k)}_{k'}+۱=۸k'+۱$

اگر $a=۴k+۳ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=۱۶k^۲+۲۴k+۸+۱$

$\Rightarrow a^۲=۸\underbrace{(۲k^۲+۳k+۱)}_{t}+۱=۸t+۱$

۱ هر عدد زوج به‌صورت $۴k$ یا $۴k+۲$ است.

۲ هر عدد فرد به‌صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ است.

نتیجه: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲ به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ است. (امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰)

۳ مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است.

نتیجه: مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲، به‌صورت $۸k+۱$ است.

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a، b، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۱) $a\,|\,cd$ ۲) $b\,|\,cd$ ۳) $c\,|\,ab$ ۴) $d\,|\,ab$ ۵) $ab\,|\,cd$

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $-a|b$ و $a|-b$ و $-a|-b$.

$a\,|\,b \to b=aq$: $-b=a(-q)\to a\,|\,-b$ ، $b=-a(-q)\to -a\,|\,b$ ، $-b=-aq\to -a\,|\,-b$

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a\,|\,۹k+۴ \xrightarrow{\times ۵} a\,|\,۴۵k+۲۰$ ، $a\,|\,۵k+۳ \xrightarrow{\times ۹} a\,|\,۴۵k+۲۷$ $\Rightarrow a\,|\,۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷$

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$ (نهایی تیر ۹۸، حل صفحه ۱۲)

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟ نه، مثال نقض: $a=b=۲$ ، $d=۲c=۶$ ولی $\underbrace{۲+۳}_{۵}\nmid \underbrace{۲+۶}_{۸}$

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند. (یعنی ثابت کنید: $(۲k-۱,۲k+۱)=۱$)

$(a,a+۱)=d\Rightarrow \begin{cases} d\,|\,a\\ d\,|\,a+۱\end{cases}\Rightarrow d\,|\,(a+۱)-a \Rightarrow d\,|\,۱\Rightarrow d=۱$

(راهنمایی : فرض کنید $(m,m+۱)=d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$.)

ب) $\underbrace{(۲k-۱,۲k+۱)}_{\text{۲ عدد فرد متوالی}}=d\Rightarrow \begin{cases} d\,|\,۲k-۱\\ d\,|\,۲k+۱\end{cases}$ $\Rightarrow d\,|\,۲$ ، $d=۲\nmid ۲k-۱$ ✗ ، $d=۱$ ✓

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=۱$.

۸ اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $m,n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید :

$m\le n\,,\,a|b\Rightarrow a^m|b^n$ $\quad a\,|\,b\xrightarrow[m\le n\to n-m\ge ۰]{\uparrow m} a^m\,|\,b^m \xrightarrow[\times b^{n-m}]{\text{ویژگی ۱}} a^m\,|\,b^m\times b^{n-m}\Rightarrow a^m\,|\,b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$a=۷q+۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶q+۴۰$

$a=۸q'+۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶q'+۴۹$

$۸a-۷a=۵۶\underbrace{(q-q')}_{q''}-۹$

$\Rightarrow a=۵۶q''\underbrace{-۹}_{\text{منفی!}}\Rightarrow a=\underbrace{۵۶q''-۵۶}_{\text{فاکتور}}+\underbrace{۵۶-۹}_{r}\Rightarrow$

$a=۵۶(q''-۱)+۴۷ \to r$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$ ≡ حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

(راهنمایی : برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $(n^۳-n)|۳$). $n(n-۱)(n+۱)$

$n=۳k\Rightarrow n^۳-n=n(n-۱)(n+۱)=۳\underbrace{k(۳k-۱)(۳k+۱)}_{t}=۳t$

$n=۳k+۱\Rightarrow n^۳-n=(۳k+۱)(۳k)(۳k+۲)=۳\underbrace{k(۳k+۱)(۳k+۲)}_{t}=۳t$

$n=۳k+۲\Rightarrow n^۳-n=(۳k+۲)(۳k+۱)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}=۳\underbrace{(۳k+۲)(۳k+۱)(k+۱)}_{t}=۳t$

n در تقسیم بر ۳، ۳ حالت دارد و در تمام حالت‌ها $۳\,|\,n^۳-n$.

برهان خلف: اگر $(p,q)=d\neq ۱$ باشد:

$d\,|\,p \xrightarrow{\text{اول } p \text{ و } d\neq ۱} d=p$

$d\,|\,q \xrightarrow{\text{اول } q \text{ و } d\neq ۱} d=q$

$\Rightarrow p=q$ ✗

با فرض $p\neq q$ به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و $(p,q)=۱$.

فرد $a \to$ فرد $a+۲$

نکته هیچ عدد زوجی، یک عدد فرد را نمی‌شمارد.

$b\,|\,\underbrace{a+۲}_{\text{فرد}} \to$ فرد b

فرد $a\to a^۲=۸t+۱$

فرد $b\to b^۲=۸t'+۱$

$a^۲+b^۲+۳=۸t+۱+۸t'+۱+۳$

$=۸\underbrace{(t+t')}_{Q}+۵=۸Q+۵ \to r$

یعنی باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ برابر ۵ است.