به نام او که در نام نگنجد

کتاب درسی زیرذره‌بین

حسابان ۲

پایه دوازدهم

رشته ریاضی

تألیف: **پدرام خورطلب**

نکات کتاب درسی

بررسی خط‌به‌خط کتاب درسی

تست‌ها و پرسش‌های متناسب با درس

سرشناسه : خورطلب، پدرام، ۱۳۵۳-
عنوان و نام پدیدآور : کتاب درسی زیر ذره‌بین حسابان (۲) پایه دوازدهم رشته ریاضی: نکات کتاب درسی، بررسی خطبه‌خط.../ تألیف پدرام خورطلب؛ ویراستار علمی رامتین علایی
مشخصات نشر : تهران: کتب آموزشی پیشرو، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری : ۱۴۸ص، نمودار؛ ۲۲×۲۹ س‌م.
شابک : ۱۷۰۰۰۰۰ ریال: ۸-۳-۹۴۱۳۸-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر
شناسه افزوده : اعلایی، رامتین، ۱۳۶۹-، ویراستار
شماره کتابشناسی ملی : ۸۶۷۸۲۱۳
اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیپا

این کتاب **۱۴۸** صفحه می‌باشد.

نام کتاب : **حسابان (۲) – رشته ریاضی**
ناشر : **کتب آموزشی پیشرو (کاپ)**
عنوان پروژه : **کتاب درسی زیر ذره‌بین**
تألیف : **پدرام خورطلب**
مدیر تألیف : **احمد مصلایی**
ناظر فنی : **سیما رائفی‌نیا**
صفحه‌بندی : **نازنین احمدی شفق**
حروف‌چینی : **جواد جعفریان**
ویراستار علمی : **رامتین علایی**
ویراستار فنی : **مریم مجاور**
ایده طرح جلد : **احمد مصلایی**
تصویرسازی جلد : **امیرحامد پاژتار**
لیتوگرافی و چاپ : **گلپا گرافیک/ نگار نقش**
سال و نوبت چاپ : **۱۴۰۲/ اول**
شابک : **۸-۳-۹۴۱۳۸-۶۲۲-۹۷۸**
شمارگان : **۱۰۰۰ نسخه**
قیمت : **۱۷۰۰۰۰ تومان**

مرکز فروش: میدان انقلاب- خیابان فخررازی- خیابان وحیدنظری غربی- پلاک ۸۳
۰۲۱-۶۶۴۹۳۴۹۰ ۰۲۱-۶۶۹۶۱۰۷۹ ۰۲۱-۶۶۹۶۴۷۲۳ -۵ فروشگاه: ۰۲۱-۶۶۹۵۳۵۱۷-۱۸
صندوق پستی: ۱۳۱۴۵-۱۱۳۹ آدرس سایت زیرذره‌بین: www.zirezarebinpub.ir
سایت نشر کاپ: www.cup-book.com
cupbook.pub

مقدمهٔ مولف

حدود چهار سال پیش، چهل و سومین کتابم را نوشتم بعد از گذشت چند ماه از چاپ آن کتاب، تصمیم جدی گرفتم که دیگر کتابی ننویسم. درواقع انگیزه‌ای برای تألیف نداشتم .تجربهٔ سال‌های متمادی کار کردن با ناشران مختلف باعث شد متوجه این نکته بشوم که ناشران معروف و قدیمی در پرداخت حق‌التألیف کم‌لطفی می‌کنند و ناشران جوان و با انگیزه سهم قابل توجهی از بازار فروش ندارند.

با توجه به اینکه یک کتاب حدوداً ۲۰۰ صفحه‌ای بیش از ۳۰۰ ساعت کار مفید و بی‌وقفه می‌طلبد از لحاظ اقتصادی توجیهی برای کار تالیف نمی‌دیدم. این دلایل به اضافه عدم وجود قانون کپی‌رایت باعث شد که در این سال‌ها دور کتاب نوشتن را یک قلم قرمز بکشم.

در طول چهار سال با نهایت احترام به هیچ یک از پیشنهاداتم پاسخ مثبت ندادم، تا اینکه دوست و همکار عزیزم جناب آقای دکتر مصلایی با من تماس گرفتند و پیشنهاد تألیف یک کتاب را به من دادند در ابتدا همان‌طور که گفتم تصمیم نداشتم کتابی بنویسم؛ اما وقتی برای مذاکره به دفتر انتشارات مراجعه کردم، احساس کردم با یک چهارچوب متفاوت و خلاقانه مواجه هستم، موضوع برایم جذاب بود و قلقلکم می داد، کمی سوژه را در ذهنم مرور کردم ... اصلاً کار راحتی نبود، شاید همین سخت بودن اجرای طرح باعث انگیزهٔ مجدد من در کار تألیف شد و در نهایت این کتاب نتیجهٔ این اتفاق نیکو بود که به سبب آن پروردگار مهربان را شاکر هستم.

در پایان از ناشر بزرگوار انتشارات کاپ، جناب آقای سید احمد موسوی، و مدیریت تألیف جناب آقای دکتر احمد مصلایی و سرکار خانم مریم مجاور و بقیهٔ همکاران انتشارات از جمله طراحان محترم خانم‌ها نازنین احمدی شفق و سیما رائفی‌نیا که در تولید و اجرای این کتاب کمک شایانی عرضه داشتند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

با احترام به یاد کارهای مشترک و متعدد با دوست و همکار عزیزم «آقای میرنوید ضیابری» و همچنین تشکر و قدردانی از دوست و همکار عزیزم «آقای رامتین علایی» که در نمونه‌خوانی و بازخوانی کتاب کمک شایانی را در حق بنده نموده‌اند.

و باسپاس از همه آموزگاران سرزمینم که با عشق و تلاش فراوان خود چرا آموزش را روشن نگه داشته اند ...

این کتاب به «خانم دکتر مهین سلیمانیها» و «مهندس محسن زهتابچی» تقدیم می گردد.

با احترام پدرام خورطلب

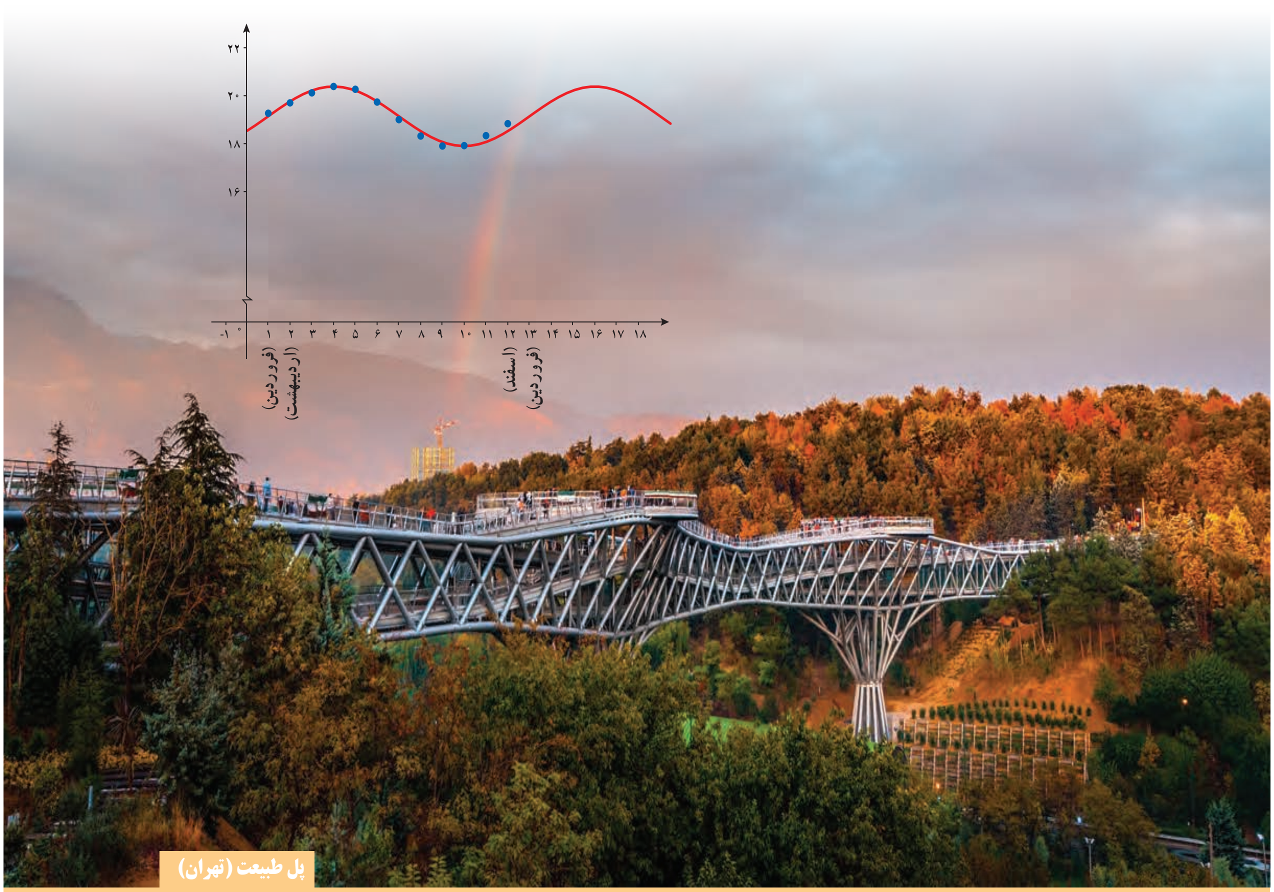
فهرست

فصل ۱

تابع

۱ تبدیل نمودار توابع

۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

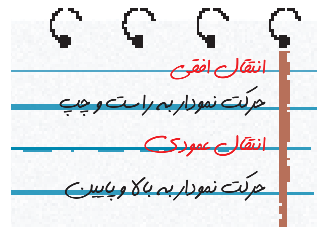


پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل‌سازی می‌شوند. تبدیل نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت $y=1/24\sin(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6})+19/14$ ، مدل ریاضی زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

درس ۱ تبدیل نمودار توابع

برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

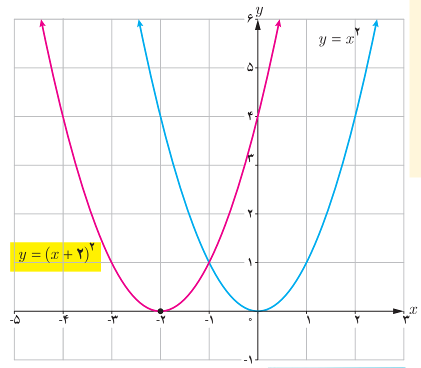


انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+2)^2$ و $y=x^2+3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^2$ رسم کنید.

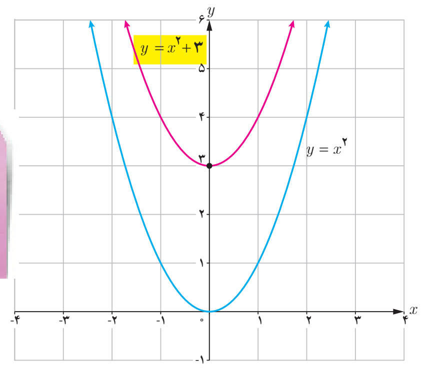
پرسش برای رسم $y=x^2+1$ از روی $y=x^2$، این انتقال، .... است.
(داخل ۹۸)

پاسخ عمودی



۲ واحد به چپ

(الف)



۳ واحد بالا

(ب)

در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_0)=f(x_0)+k=y_0+k$$

بنابراین نقطه (x_0, y_0+k) از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

تست نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس دو واحد به سمت yهای منفی انتقال می‌دهیم؛ نمودار جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

۱) (۴ و ۳) ۲) (۵ و ۲) ۳) (۵ و ۳) ۴) (۶ و ۲)

پاسخ ۱ برای اینکه ۳ واحد به طرف xهای مثبت منتقل شود x را به $x-3$ تبدیل می‌کنیم و برای انتقال عمودی عبارت را منهای ۲ می‌کنیم:
$y=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2=-x^2+8x-12$، برای اینکه این تابع بالای نیمساز اول قرار گیرد:

$-x^2+8x-12>x \Rightarrow 3<x<4$

انتقال افقی $(k > ۰)$

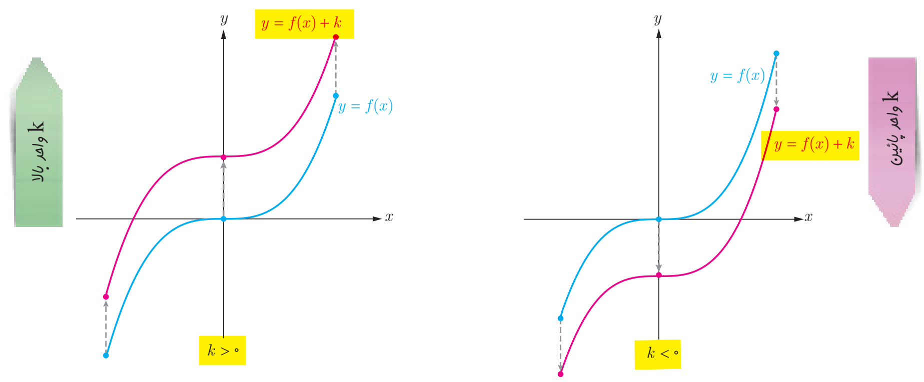
الف: k واحد به راست

$f(x-k)$

ب: k واحد به چپ

$f(x+k)$

برای رسم نمودار $y = f(x)+k$، اگر $k > ۰$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < ۰$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.



پرسش نمودار $y=(x-۲)^۲$ از روی $y = x^۲$ با انتقال .... به اندازه ۲ واحد به سمت ....
(هشترودی ۹۹)

پاسخ افقی ـ راست

به روش مشابه، اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$h(x_۰-k) = f(x_۰-k+k) = f(x_۰) = y_۰$$

بنابراین نقطه $(x_۰-k\ ,y_۰)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع f است.

برای انتقال افقی x باید تبدیل شود:

نمونه

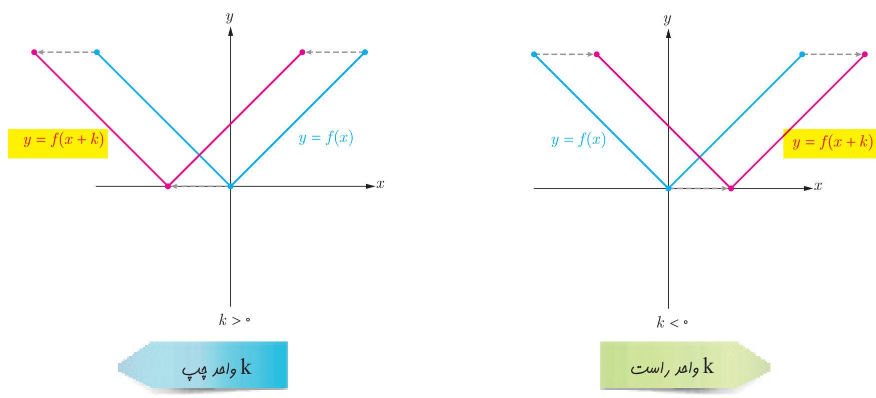
انتقال افقی ۲ واحد به سمت راست کافی است:

$x \to x-۲$

برای انتقال افقی ۳ واحد به سمت چپ کافی است:

$x \to x+۳$

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > ۰$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < ۰$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



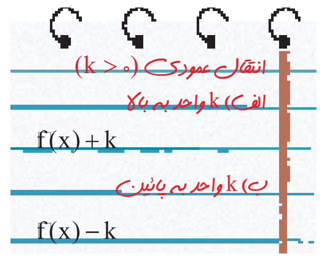
تست نمودار تابع $y = |\frac{۱}{۲}x|-۲$ را ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $-۳/۵$ ۲) -۳ ۳) $-۲/۵$ ۴) -۲

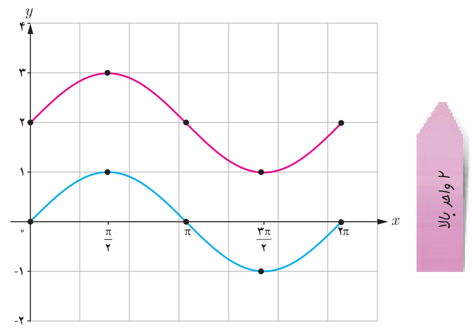
پاسخ ۲ کافی است ابتدا $x \to x+۴$ و عبارت را یک واحد مثبت کنیم درنتیجه:

$$y = |\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲+۱ = |\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$$

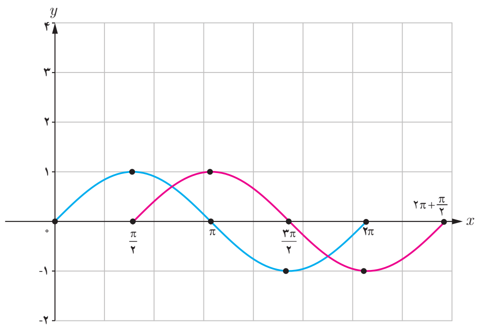
حال کافی است $|\frac{۱}{۲}x|-۲ = |\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$ را با جایگذاری گزینهٔ $x = -۳$ بیابیم.



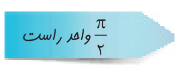
مثال : نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنه $[0,2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\sin x+2$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات صفحهٔ قبل، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



(الف)



(ب)



کار در کلاس

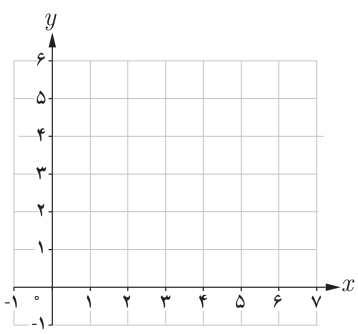
۱

الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[0,4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

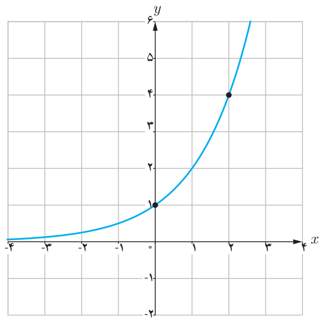
ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-2)$ و $g(x)=f(x)+3$ را به کمک انتقال رسم کنید.

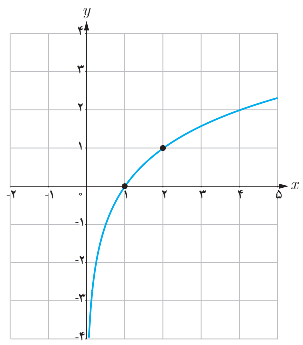
پ) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

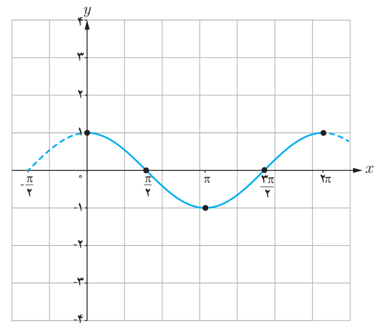
	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-2)$	$g(x)=f(x)+3$
دامنه	$[0,4]$		
برد			



۲ در زیر، نمودار توابع $y=2^x$، $y=\log_2 x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=2^{x-1}+2$، $y=\log_2(x+2)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.







نکته

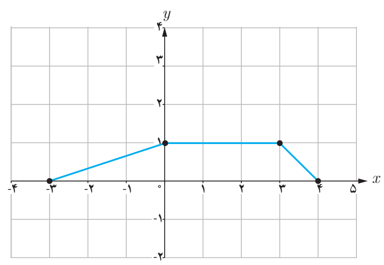
❶ در انتقال افقی k واحد به سمت راست کافی است تا x را به $x-k$ تبدیل کرد.

❷ در انتقال افقی k واحد به سمت چپ کافی است تا x را به $x+k$ تبدیل کرد.

❸ در انتقال عمودی k واحد به بالا به تابع k واحد اضافه می‌کنیم.

❹ در انتقال عمودی k واحد به پایین از تابع k واحد کم می‌کنیم.

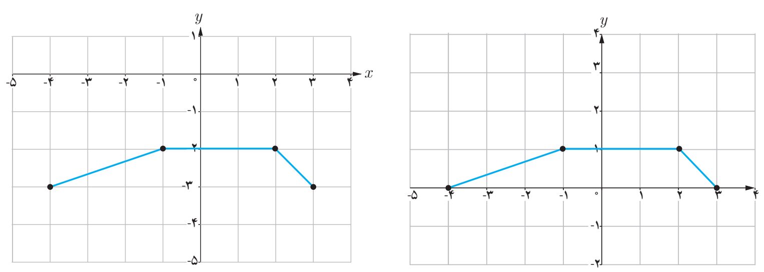
✤ **مثال :** نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ را رسم می‌کنیم.



پرسش نمودار $y=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ از .... نسبت به $y=\cos x$ به‌دست می‌آید.

پاسخ انتقال افقی $\frac{\pi}{3}$ به سمت چپ

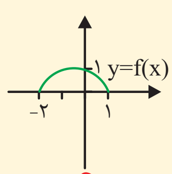
برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ رسم شود (شکل ب).



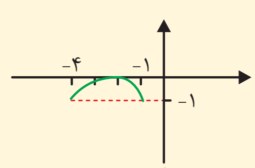
(الف) (ب)

پرسش نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر است، نمودار $y=f(x+2)-1$ را رسم کنید. (متوسطه دوم ملاصدرا دختران کرج ـ دی ماه ۹۸)

پاسخ کافی است که نمودار را به اندازهٔ ۲ واحد انتقال افقی به سمت چپ و یک واحد انتقال عمودی به سمت پایین انجام دهیم.



①



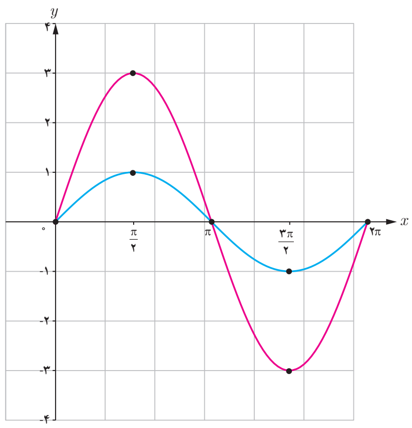
②

انبساط افقی:
افزایش طول منحنی
انقباض افقی:
کاهش طول منحنی

انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.



نقاط تلاقی یکسان

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	۰	۱	۰	۱-	۰
$y=۳\sin x$	۰	۳	۰	۳-	۰
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	...	...	...	...	...

عرض ۳ برابر
عرض نصف

پرسش نمودار $y = -f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟ (امتحان نهایی ۹۸)

پاسخ محور طول‌ها

۲ با مقایسهٔ نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

۳ دامنه و برد توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟

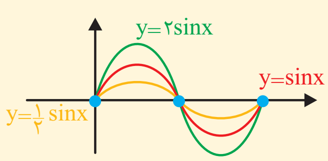
در حالت کلی اگر $(x_۰ , y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_۰) = kf(x_۰) = ky_۰$$

بنابراین $(x_۰ , ky_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x_۰ , y_۰)$ از نمودار تابع f است.

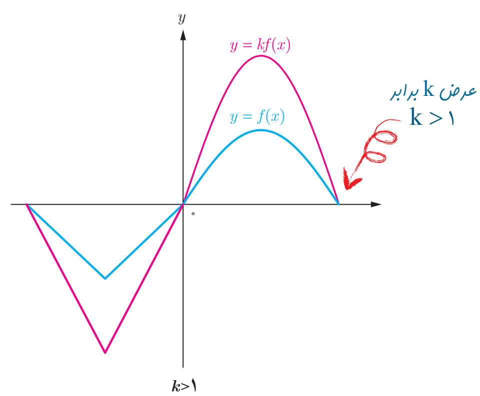
پرسش نمودارهای $y = ۲\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را در یک دستگاه رسم کنید. (متوسطهٔ دوم ملاصدرا دختران کرج - دی ماه ۹۸)

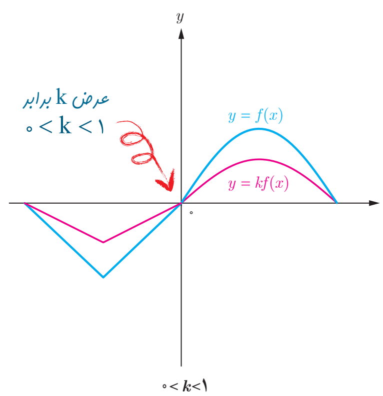
پاسخ در نمودار $y = ۲\sin x$ عرض‌ها دو برابر و طول‌ها تغییر نمی‌کند و در نمودار $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ عرض‌ها نصف و طول‌ها تغییر نمی‌کند.



انبساط عمودی:
افزایش عرض منحنی
انقباض عمودی:
کاهش عرض منحنی

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.





پرسش نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ از .... نمودار $y = f(x)$ حاصل شده است. (ملاصدرا کرج ۹۹)

پاسخ انقباض عمودی

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید. نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

در انبساط عمودی باید تابع را در یک مقدار مشخص ضرب کرد.

نمونه

$y = 2f(x)$، یعنی انبساط عمودی ۲ برابری و $y = \frac{1}{3}f(x)$ یعنی انقباض عمودی $\frac{1}{3}$ برابری

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کار در کلاس

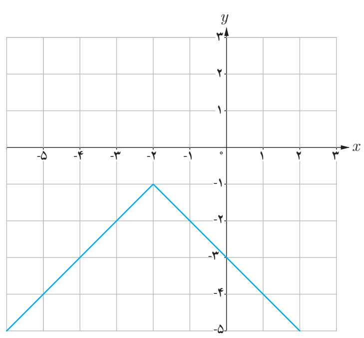
۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

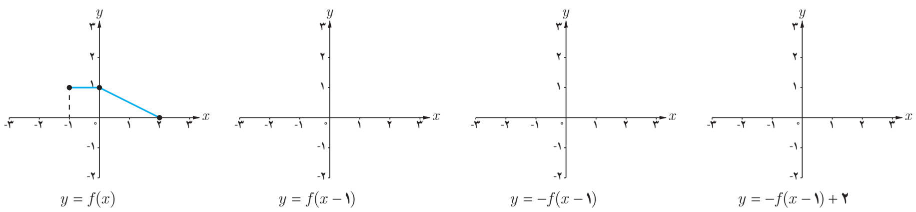
پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.



پرسش اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از .... نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.
(نهایی خرداد۹۹)

پاسخ انبساط افقی

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-۱) + ۲$ را رسم کنید.



انبساط و انقباض افقی

نکته

با فرض $k > ۱$؛

❶ در انبساط افقی k برابری x را به $\frac{۱}{k}x$ تبدیل می‌کنیم.

❷ در انقباض افقی $\frac{۱}{k}$ برابری، x را به kx تبدیل می‌کنیم.

❸ در انبساط عمودی k برابری، تابع را در عدد k ضرب می‌کنیم.

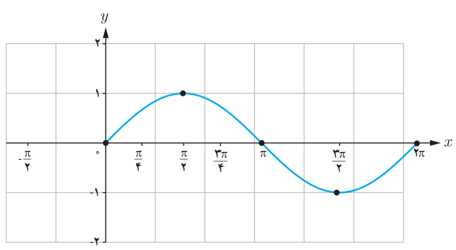
❹ در انقباض عمودی $\frac{۱}{k}$ برابری، تابع را در عدد $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم.

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[۰, \pi]$ رسم کنیم.

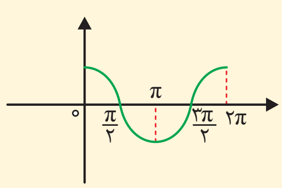
x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y = \sin ۲x$	...	...	...	...	...



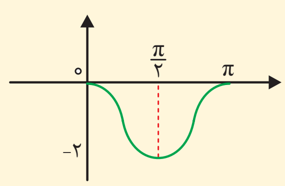
۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

پرسش ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار $y = \cos ۲x - ۱$ را رسم کنید. (امتحان نهایی ۹۹)

پاسخ نمودار $y = \cos x$ به صورت روبه‌رو است. برای رسم $y = \cos ۲x - ۱$ کافی است که طول‌ها نصف و انتقال عمودی یک واحد به پایین صورت گیرد.



$y = \cos x$



$y = \cos ۲x - ۱$

پرسش نقطه $A(1,2)$ متعلق به $y=f(x)$ است، نقطهٔ متناظر آن در $y=2f(\frac{x}{2})-1$ چیست؟

پاسخ $A(2\ \text{و}\ 3)$

در حالت کلی اگر $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(\frac{x_\circ}{k})=f(k\frac{x_\circ}{k})=f(x_\circ)=y_\circ$$

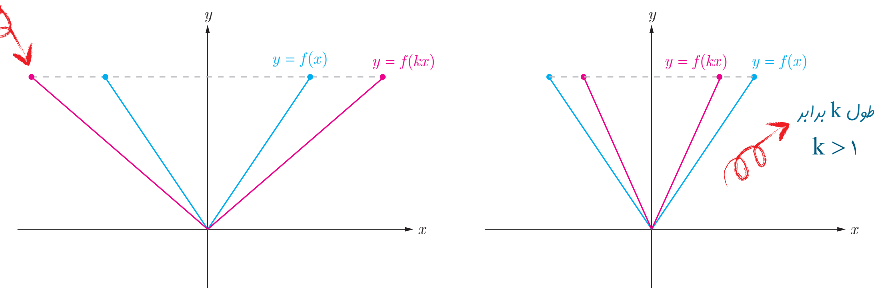
g

بنابراین نقطه $(\frac{x_\circ}{k},y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودارتابع $y=f(kx)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.

طول k برابر
$0<k<1$



ب) $0<k<1$

الف) $k>1$

نکته

اگر نقطهٔ $A(x_\circ , y_\circ)$ متعلق به $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ متناظر با $y=kf(ax+b)+c$ برابر است با:

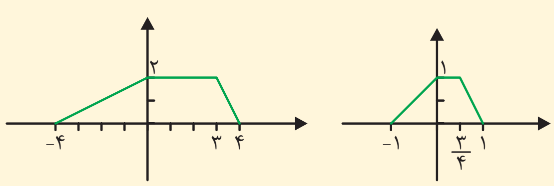
$$A'\left|\begin{array}{l}\frac{x_\circ - b}{a}\\ ky_\circ + c\end{array}\right.$$

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

پرسش با استفاده از نمودار $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید. (امتحان نهایی ۹۸)

پاسخ کافی است طول نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر کرده، سپس عرض نقاط را نصف کنیم. خواهیم داشت:



پرسش دامنهٔ تابع $y = f(x)$ به صورت $[۱,۳]$ است. دامنهٔ تابع $y = f(۲x)$ چیست؟

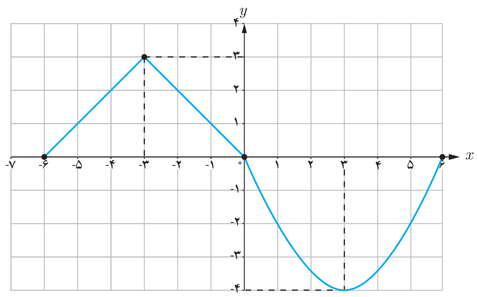
(ملاصدرا کرج-۹۷)

پاسخ $[\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}]$

کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را برای $k > ۰$ و $k < ۰$ تعیین کنید.

۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودارتوابع $y = f(۳x)$ و $y = f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

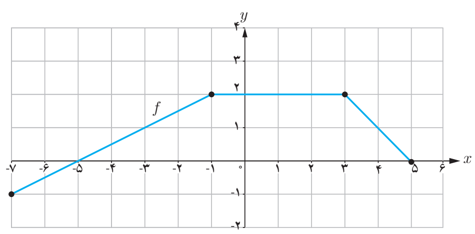


۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos ۲x - ۱$

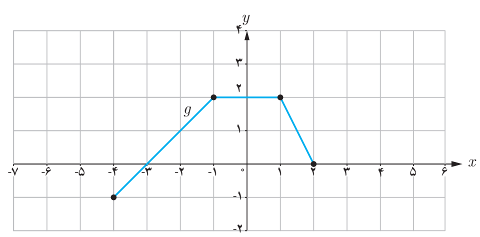
ب) $y = ۲\cos(\frac{x}{۳})$

مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودارتابع $g(x) = f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



اگر $A = (x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A' = \left(\frac{x_۰ - ۱}{۲}, y_۰\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا[۱]:

$$g\left(\frac{x_۰-۱}{۲}\right) = f\left(۲\left(\frac{x_۰-۱}{۲}\right)+۱\right) = f(x_۰-۱+۱) = f(x_۰) = y_۰$$



بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

با توجه به اینکه $\frac{x_۰ - ۱}{۲} = \frac{x_۰}{۲} - \frac{۱}{۲}$، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع $y = f(۲x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x) = f(۲x+۱)$ رسم شود؟ چرا؟

۱ــ برای یافتن طول نقطه A'، از معکوس تابع $y = ۲x + ۱$ استفاده می‌کنیم.

نکته

اگر دامنه و برد $y = f(x)$ به ترتیب:

$D_f = [a,b]$

$R_f = [c,d]$

باشد، دامنهٔ تابع:

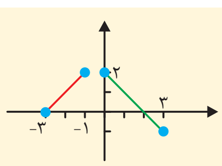
$y = kf(mx+n) + r$

عبارتست از:

$D = [\frac{a-n}{m}, \frac{b-n}{m}]$

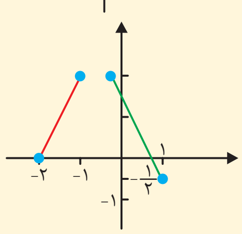
$R = [kc + r, kd + r]$

پرسش نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(۲x+۱)$ را رسم کرده و دامنهٔ برد آن را تعیین کنید.



(امتحان نهایی-۹۹)

پاسخ یک واحد چپ و طول‌ها نصف می‌شود، پس داریم:



حال تصویر روی محور xها $D = [-۲, -۱] \cup [-\frac{۱}{۲}, ۱]$

تصویر روی محور yها $R = [-۱, ۲]$

تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$ ۲ واحد چپ

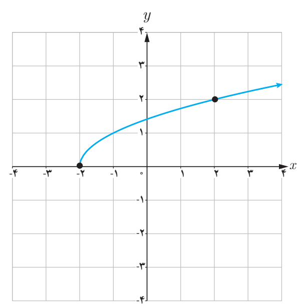
ب) $y=۲+\sqrt{x}$ ۲ واحد بالا

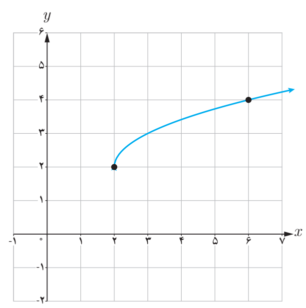
پ) $y=-۲\sqrt{x}$ عرض دو برابر و قرینه نسبت به طول‌ها

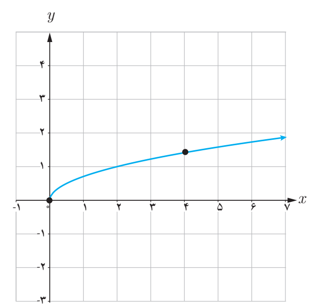
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ طول دو برابر

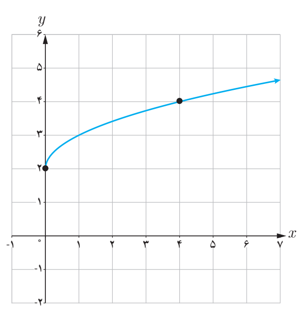
ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$ ۲ واحد راست و ۲ واحد بالا

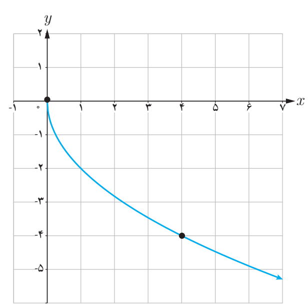
ج) $y=\sqrt{-۲x}$ طول نصف، قرینه نسبت به طول

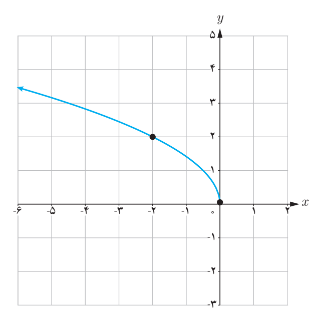

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

تست قرینهٔ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده سپس دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم، نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری خارج ریاضی ۹۷)

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

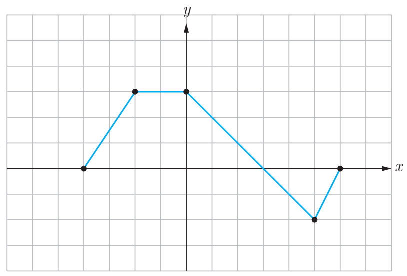
پاسخ ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}}\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به سمت xهای}}\sqrt{-(x-۲)}$$

حال تلاقی با $y=x$:

$$\sqrt{-x+۲}=x\rightarrow x=۱$$

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(-x)$ قرینه نسبت به محور عرض‌ها

ب) $y = ۲f(x-۱)$ یک واحد راست، عرض ۲ برابر

پ) $y = -f(x) +۲$ دو واحد بالا قرینه نسبت به محور xها

ت) $y = f(۲x-۱)$ یک واحد راست، طول نصف

ث) $y = f(۳-x)$ سه واحد چپ قرینه نسبت به محور عرض‌ها

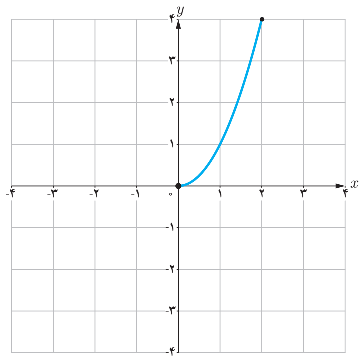
نکته

❶ قرینهٔ نسبت به محور yها کافی است x را به $-x$ تبدیل کنیم.

❷ قرینهٔ نسبت به محور xها کافی است تابع را قرینه کنیم.

❸ قرینهٔ نسبت به مبدأ مختصات کافی است که $x \to -x$ تبدیل کرده و تابع را قرینه کنیم.

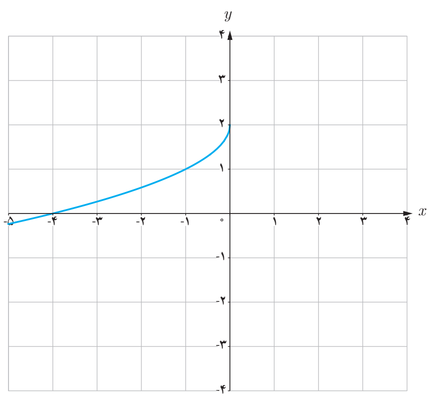
۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.



الف) $y = f(-x)$ قرینه نسبت به محور عرض‌ها

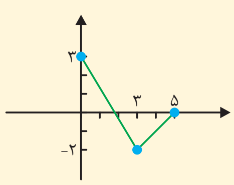
ب) $y = -f(x)$ قرینه نسبت به محور طول‌ها

پ) $y = -f(-x)$ قرینه نسبت به محور طول‌ها و عرض‌ها



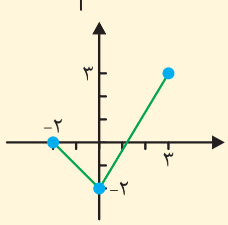
۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

پرسش نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار $g(x) = f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنهٔ آن را تعیین کنید. (امتحان نهایی ۹۸)



پاسخ

ابتدا $x \to x+۳$ تبدیل شده، سپس $x \to -x$ پس ابتدا نمودار را ۳ واحد به سمت چپ منتقل کرده و نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم: $D=[-۲,۳]$



درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

درجهٔ چند جمله‌ای
بزرگ‌ترین توان عبارت چند جمله‌ای
را درجهٔ چند جمله‌ای گویند

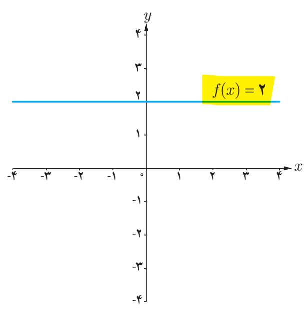
پرسش درجهٔ چندجمله‌ای $P(x) = -x^2(2x-1)^4$ برابر .... است.

پاسخ ۶

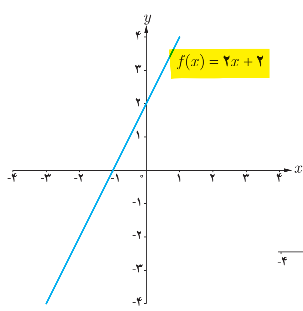
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[1]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

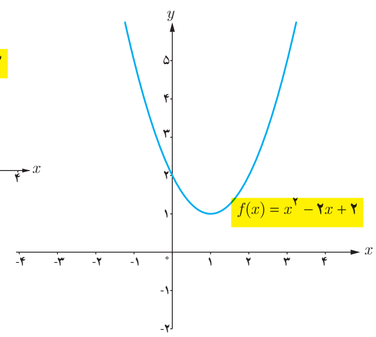
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

کار در کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

درجهٔ ۱ — درجهٔ ۲ — درجهٔ ۴

$f(x) = 2x - 3 \quad , \quad h(x) = x^3 + x - 4 \quad , \quad n(x) = 2x - x^4$

$g(x) = (x-1)^2 + 3 \quad , \quad m(x) = 5 \quad , \quad p(x) = x^2(1-x)^3$

درجهٔ ۲ — درجهٔ ۰ — درجهٔ ۵

۱ــ برای $f(x)=0$، درجه تعریف نمی‌شود.

پرسش درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

«چندجمله‌ای $P(x) = (2-x)^2(x+1)^3$ یک چندجمله‌ای درجه ۵ است.»

پاسخ درست است، چون: $(-x)^2(x)^3 = -x^5$

پرسش درفاصلهٔ $[0,1]$ نمودار $y = x^5$ از نمودار $y = x^2$، .... است.

پاسخ پایین‌تر

فعالیت

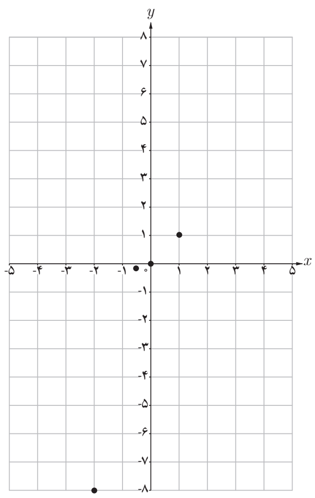
یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

x	$y = x^3$
-۲	$(-۲)^۳ = -۸$
-۱	
$-\frac{۱}{۲}$	$(-\frac{۱}{۲})^۳ = -\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	
۱	۱
۲	



کاردرکلاس

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.   یک واحد بالا قرینه نسبت به محور طول‌ها

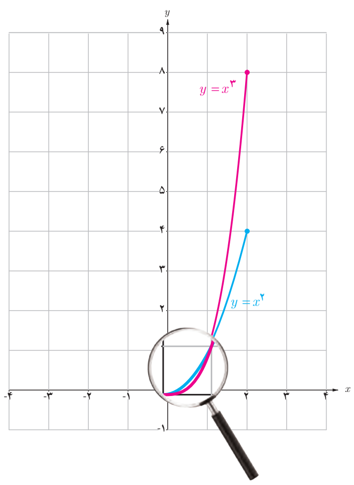
$(x-1)^3+1$ یک واحد راست و یک واحد بالا

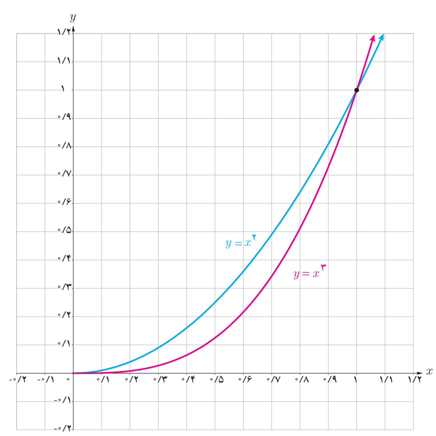
الف) $y = (x+1)^3$ ب) $y = -x^3+1$ پ) $y = x^3-3x^2+3x$

یک واحد چپ

۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ در فاصله $[0,2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0,1]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1,2]$ چطور؟





پرسش در فاصلهٔ $[0,1]$ از بین دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ نمودار کدام تابع پایین‌تر قرار دارد؟ (امتحان نهایی ۹۸)

پاسخ واضح است که در بازه $[0,1]$ نمودار $y = x^3$ پایین‌تر واقع است.